



## ENSINO DE VIBRAÇÕES MECÂNICAS EM MEIOS CONTÍNUOS COM AUXÍLIO DE RECURSOS COMPUTACIONAIS

**Oswaldo Prado de Rezende** - [rezendeop@aol.com](mailto:rezendeop@aol.com)

**Patrícia Guimarães Abramof** - [patriciagabaramof@uol.com.br](mailto:patriciagabaramof@uol.com.br)

**Ângela Dantas de Souza Pinto** - [angeladantas@bol.com.br](mailto:angeladantas@bol.com.br)

**Gustavo Tadeu Zaniboni** – [gustavo@cdt.br](mailto:gustavo@cdt.br)

Escola de Engenharia Industrial de São José dos Campos

Av. Barão do Rio Branco, 882, Jd Esplanada

12242 –800 – São José dos Campos, SP

**Resumo:** *O problema de uma viga n seccionada com diferentes condições de contorno foi estudado e discutido com a finalidade de melhorar o entendimento da influência dos parâmetros distribuídos, rigidez e massa, na dinâmica das vibrações transversais. Grupo interdisciplinar formado por professores de vibrações mecânicas, cálculo numérico e de pedagogia discutiram os meios, formatos e estratégias mais adequadas para a sua aplicação. Facilidades computacionais, programação em Matlab, incluindo uso de interface, foram introduzidas permitindo uma evidente melhora na visualização de resultados gráficos, na rapidez com que os mesmos são obtidos e ainda ofereceu diferentes possibilidades de investigação. Este trabalho propõe-se em ser uma abordagem útil na aprendizagem de vibrações em sistemas contínuos.*

**Palavras-chave:** *Vibrações, Viga, Multidisciplinar*

### 1. INTRODUÇÃO

O ensino de vibrações mecânicas na EEI – Escola de Engenharia Industrial de São José dos Campos é realizado através de uma disciplina de mesmo nome que abrange a seqüência clássica: sistemas vibrantes a 1 grau, dois graus, n graus e uma introdução aos sistemas contínuos. Os recursos didáticos também são clássicos, desde a tradicional aula expositiva até simulações em computador utilizando-se dos programas matlab/simulink, mais usuais no estudo de sistemas de parâmetros concentrados até três graus de liberdade. Faltam então atividades de laboratório que possam colaborar com a aprendizagem de sistemas vibrantes com distribuição contínua de massa e rigidez.

A proposta deste trabalho é proporcionar ao aluno a oportunidade de participar ativamente na construção do conhecimento, utilizando para isso, a integração de disciplinas, vibrações mecânicas, métodos numéricos e informática em torno de temas específicos.

A abordagem interdisciplinar para o ensino de engenharia, além de garantir maior solidez na aprendizagem de conteúdos conceituais, permite desenvolver os chamados conteúdos procedimentais e atitudinais. No primeiro caso, o aluno ao frequentar o laboratório de informática, pode realizar ações como as apresentadas nas diretrizes curriculares de ensino de engenharia como diagnosticar, formular e encaminhar soluções de problemas. Ao trabalhar

em equipe, os alunos exercitam duas relevantes habilidades: comunicar-se e cooperar, ambas fundamentais para o mundo globalizado (SANTOMÉ, 2000).

Desta forma, a situação de aprendizagem mediante projetos é amplamente valorizada. O francês P. PERRENOUD (1999) entre outros difunde a idéia do filósofo da educação J. DEWEY a respeito da pedagogia de projetos, estratégia que permite a ampliação da compreensão da realidade. Nesta perspectiva, ciência e tecnologia são instrumentos na resolução de problemas, o que pode ser visto como algo em constante aperfeiçoamento, isto é, ao se propor a solução para uma dada situação, formula-se uma nova pergunta e assim sucessivamente.

Os problemas de vibrações contínuas que foram trabalhados com este enfoque são os que tradicionalmente aparecem na literatura: vibrações longitudinais e de torção em barras e vibrações transversais em vigas, explorando situações diversas como materiais, geometria e condições de contorno. Dentro da técnica de elementos finitos, a programação em Matlab foi utilizada para a montagem das matrizes de massa, rigidez e força, considerando diferentes condições de contorno. Uma vez conhecidas estas matrizes, algoritmos são implementados para se determinar os modos naturais e as respectivas frequências naturais bem como para se obter o comportamento dinâmico da estrutura em questão.

Com este domínio do conhecimento, o aluno ou grupo de alunos, é incentivado a utilizar programação orientada a objetos no sentido de facilitar a exploração e visualização de diferentes situações como citado anteriormente; Como exemplo, mostra-se neste trabalho, o problema da viga com seção transversal não uniforme, “pinada” em ambas extremidades.

Dentre outras possibilidades foi escolhido o problema de uma viga pelo fato de que as condições de contorno proporcionam uma maior discussão durante a programação das montagens das matrizes de massa e rigidez. A viga é não uniforme e somente são consideradas as deformações transversais, flexões, o que leva a uma simplificação na obtenção da matriz de rigidez do elemento de viga.

## 2. MODELAGEM

A figura 1 representa o modelo de uma viga não uniforme de comprimento  $L$  “pinada” nas extremidades;  $y$  é o deslocamento transversal de um ponto da viga localizado na posição  $x$ . O objetivo é obter as configurações dos modos naturais e as respectivas frequências utilizando para isto o Método dos Elementos Finitos que consiste em uma técnica de discretização largamente empregada em estruturas complexas, segundo ALVES FILHO (2000).

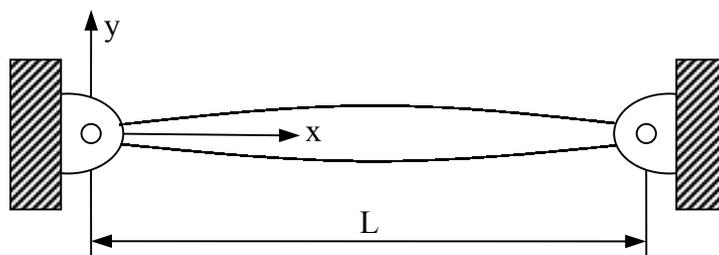
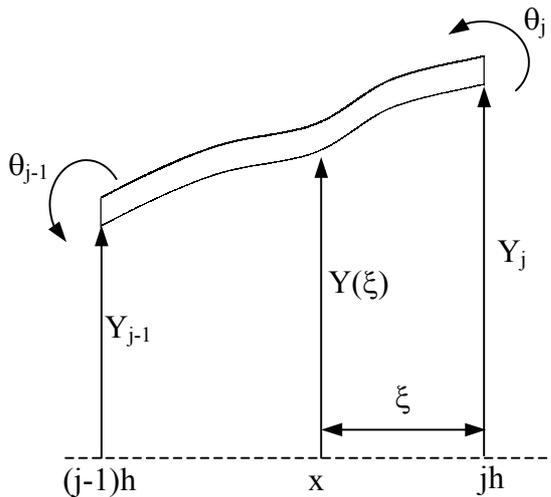


Figura 1: viga não uniforme “pinada” nas extremidades

Dividindo-se a barra em  $n$  elementos, utilizando-se uma função de interpolação cúbica e considerando as propriedades do material constantes para cada elemento, de acordo com MEIROVITCH (2000), as matrizes de rigidez e massa para o  $j$ -ésimo elemento finito,  $j = 1, 2 \dots n$ , o qual está representado na figura 2, são dadas abaixo nas fórmulas (1-a) e (1-b).



$h$  é o comprimento de cada elemento:

$$h = \frac{L}{n}$$

$Y_{j-1}$ ,  $h\theta_{j-1}$ ,  $Y_j$  e  $h\theta_j$  são os deslocamentos nodais

$\xi$  é a coordenada local

Figura 2: Deslocamento nodal do elemento finito da viga

$$K_j = \frac{EI_j n^3}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}, j=1,2,\dots,n \quad (1-a)$$

$$M_j = \frac{m_j L}{420n} \begin{bmatrix} 156 & 22 & 54 & -13 \\ 22 & 4 & 13 & -3 \\ 54 & 13 & 156 & -22 \\ -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix}, j=1,2,\dots,n \quad (1-b)$$

onde

$E$ : módulo de elasticidade do material do elemento de viga..... $N/m^2$   
 $I$ : momento de inércia de área da seção transversal do elemento de viga..... $m^4$   
 $m$ : massa por unidade de comprimento do elemento de viga..... $kg/m$   
 $L$ : comprimento da viga..... $m$

As matrizes globais de rigidez,  $K$ , e de massa,  $M$ , são geradas através da superposição indicada no esquema da figura 3. Essa ocorre em decorrência das deformações nodais do final de um elemento  $j$  e as do início do elemento subsequente  $j+1$ , serem as mesmas.

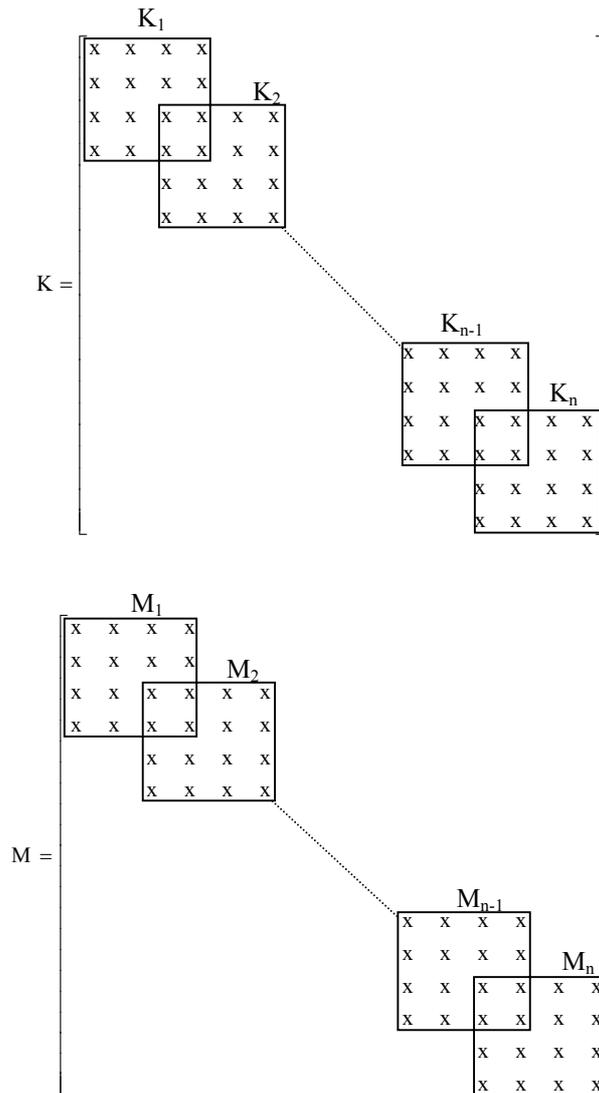


Figura 3: Montagem das matrizes de rigidez e de massa

As condições de contorno são consideradas ao se extrair as correspondentes linhas e colunas das matrizes de rigidez e de massa do primeiro,  $j = 1$ , e último,  $j = n$ , elementos nodais, equações 1-a e 1-b. Para ilustrar esta questão as matrizes  $K_j$  e  $M_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , são determinadas a seguir considerando duas situações, i) ambas extremidades pinadas, figura 4-(a) e ii) uma extremidade engastada e a outra livre, figura 4 (b).

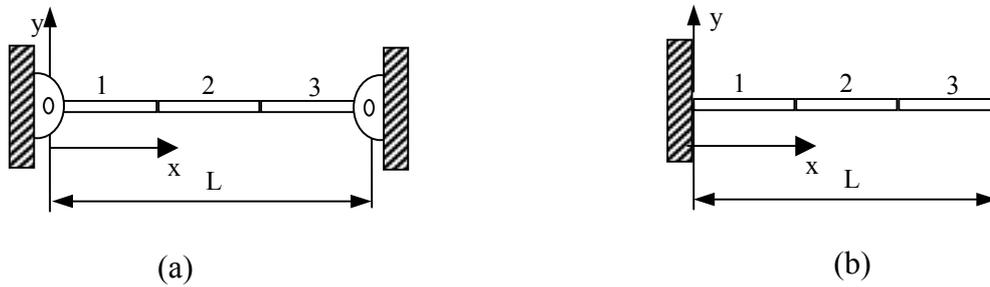


Figura 4: viga uniforme dividida em 3 elementos: (a) “pinada” nas duas extremidades e (b) engastada em uma extremidade e livre na outra (elimina-se a linha 1 e coluna 1 das matrizes  $K_1$  e  $M_1$ ; elimina-se a linha 3 e coluna 3 das matrizes  $K_3$  e  $M_3$ ). As matrizes  $K_j$  e  $M_j$ ,  $j = 1, 2$  e  $3$ , são:

$$K_1 = \frac{27EI_1}{L^3} \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 12 & -6 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \frac{27EI_2}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \quad K_3 = \frac{27EI_3}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \frac{m_1L}{1260} \begin{bmatrix} 4 & 13 & -3 \\ 13 & 156 & -22 \\ -3 & -22 & 4 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \frac{m_2L}{1260} \begin{bmatrix} 156 & 22 & 54 & -13 \\ 22 & 4 & 13 & -3 \\ 54 & 13 & 156 & -22 \\ -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \frac{m_3L}{1260} \begin{bmatrix} 156 & 22 & -13 \\ 22 & 4 & -3 \\ -13 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

considerando as mesmas propriedades,  $EI$  e  $m$ , para os três elementos, as matrizes globais, são:

$$K = \frac{27EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 24 & 0 & -12 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 8 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & -12 & -6 & 24 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad M = \frac{mL}{1260} \begin{bmatrix} 4 & 13 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 312 & 0 & 54 & -13 & 0 \\ -3 & 0 & 8 & 13 & -3 & 0 \\ 0 & 54 & 13 & 312 & 0 & -13 \\ 0 & -13 & -3 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

ii) engastada em uma extremidade e livre na outra (eliminam-se as linhas 1 e 2 e as colunas 1 e 2 das matrizes  $K_1$  e  $M_1$ ; As matrizes  $K_j$  e  $M_j$ ,  $j = 1, 2$  e  $3$ , são:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{27EI_1}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}, & K_2 &= \frac{27EI_2}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}, & K_3 &= \frac{27EI_3}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \\
 M_1 &= \frac{m_1L}{1260} \begin{bmatrix} 156 & -22 \\ -22 & 4 \end{bmatrix}, & M_2 &= \frac{m_2L}{1260} \begin{bmatrix} 156 & 22 & 54 & -13 \\ 22 & 4 & 13 & -3 \\ 54 & 13 & 156 & -22 \\ -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix}, & M_3 &= \frac{m_3L}{1260} \begin{bmatrix} 156 & 22 & 54 & -13 \\ 22 & 4 & 13 & -3 \\ 54 & 13 & 156 & -22 \\ -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

considerando as mesmas propriedades, EI e m, para os três elementos, as matrizes globais, são:

$$K = \frac{27EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \quad M = \frac{mL}{1260} \begin{bmatrix} 312 & 0 & 54 & -13 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 13 & -3 & 0 & 0 \\ 54 & 13 & 312 & 0 & 54 & -13 \\ -13 & -3 & 0 & 8 & 13 & -3 \\ 0 & 0 & 54 & 13 & 156 & -22 \\ 0 & 0 & -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix}$$

Com esse entendimento, a programação por computador é realizada para as montagens das matrizes globais de rigidez e massa. Os resultados anteriores, evidentemente, podem validar o programa desenvolvido.

### 3. EXEMPLO

Será considerado como exemplo uma viga não uniforme, de comprimento  $L = 1$  m, pinada nas extremidades, figura 5, dividida em 10 elementos com as propriedades de rigidez e massa dadas pela tabela 1.

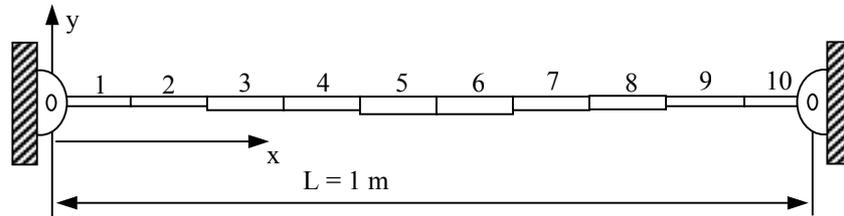


Figura 5: viga não uniforme, pinada nas extremidades, dividida em 10 elementos

Tabela 1: Propriedades dos elementos da viga da figura 5.

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$EI_j(\text{Nm}^2)$	1	1	1,44	1,44	1,96	1,96	1,44	1,44	1	1
$m_j(\text{kg/m})$	1	1	1,2	1,2	1,4	1,4	1,2	1,2	1	1

Uma vez realizada a montagem das matrizes da figura 3 e consideradas as condições de contorno, as matrizes globais de massa e rigidez para o problema em questão, estão prontas para serem inseridas na função do Matlab que calcula os auto-valores e auto-vetores da matriz dinâmica,  $M^{-1}K$ , da viga da figura 5. Uma nova fase do trabalho inicia-se a partir da validação dos resultados encontrados, isto é, a programação orientada a objetos.

### 4. INTERFACE COM O USUÁRIO

Com o objetivo de expor os dados de entrada e saída de forma clara e objetiva, interfaces gráficas são criadas através dos recursos de programação orientada a objetos do próprio Matlab. Esse aspecto é de suma importância no processo, pois habilita o aluno a modificar parâmetros visualmente e verificar imediatamente os resultados. Dessa forma, obtém-se um retorno visual de todos aspectos a serem verificados, imediatamente após qualquer alteração nos dados de entrada, que por sua vez também são alterados facilmente. A figura 6 exemplifica uma dessas interfaces.

vibrações transversais

elementos 10

matriz M 1 1 1.2 1.2 1.4 1.4 1.2 1.2 1 1

matriz K 1 1 1.44 1.44 1.96 1.96 1.44 1.44 1 1

modos 4

Gráfico

Figura 6: Tela com dados de entrada e saída da viga da figura 5.

Nesta tela as propriedades da viga, dados da tabela 1, estão especificadas em matriz M e em matriz K, enquanto o número de modos naturais está especificado em modos. Um clique no ícone, Gráfico, faz a abertura de uma nova tela com as configurações dos modos naturais, no caso, os 4 primeiros (figura 7). Outros tipos de interface que permitem a alteração de parâmetros visualmente e gerenciem a inclusão de matrizes e outros tipos de dados, podem também ser implementadas.

Diversas questões podem ser verificadas: Como o número de elementos, diferentes propriedades para cada elemento e ainda diferentes condições de contorno, afetam os modos e as respectivas frequências naturais? A discussão anterior pode ser ampliada, com a inclusão de uma força de excitação harmônica atuando em um ponto da figura 5, o que permite verificar o efeito da frequência de excitação na amplitude da vibração da viga.

Apesar de ser tratado neste trabalho apenas o caso de vibrações transversais em uma viga não uniforme, o mesmo pode ser estendido para o caso de vibrações longitudinais em barras e de torção em eixos.

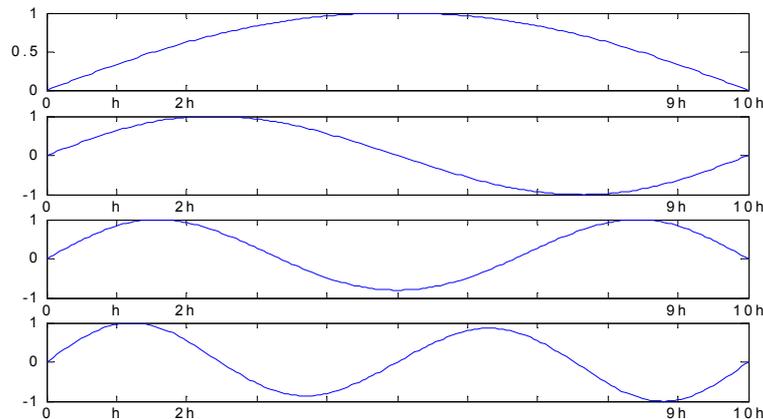


Figura 7: Representação dos 4 primeiros modos naturais da viga da figura 5.

## 5. CONCLUSÃO

Existem diversas formas e meios para incentivar os alunos a participarem mais ativamente no processo de aprendizagem e de desenvolvimento de suas habilidades e competências como preconizam as diretrizes curriculares: A interdisciplinaridade enriquece o ambiente acadêmico e contribui diretamente para a formação profissional, pois o trabalho em equipe é uma exigência do mercado de trabalho.

A modelagem de sistemas contínuos por elementos finitos foi o conteúdo abordado pela sua importância em vibrações mecânicas e também por necessitar de programação por computador, uma habilidade cognitiva necessária ao atual engenheiro. O exemplo escolhido, viga não uniforme, junto com a discussão sobre as condições de contorno e os resultados apresentados, pode servir de guia para a modelagem através do Método dos Elementos Finitos dos problemas de flexão da viga e de tração e torção em barras. A integração das atividades, modelagem e programação, deve-se completar a partir da organização de telas através de programação orientada para objetos. Além de se obter respostas mais rápidas, estas interfaces, facilitam a alteração e a visualização dos dados de entrada e saída o que deve enriquecer as análises e conclusões sobre o comportamento dinâmico do sistema contínuo.

## 6. BIBLIOGRAFIA

ALVES FILHO, A. **Elementos Finitos - A Base da Tecnologia CAE**. São Paulo: Ed. ÉRICA, 2000.

**Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia** - Resolução CNE/CES nº 11, 11 de março de 2002.

MEIROVITCH L. **Fundamentals of Vibrations**. Boston: MacGraw Hill, 2000.

PERRENOUD P. **Avaliação: Da Excelência à Regulação das Aprendizagens: Entre duas Lógicas**. Porto Alegre: ARTMED, 1999.

SANTOMÉ J. T. **Globalização e Interdisciplinaridade**. Porto Alegre: ARTMED, 2000.



**Abstract:** The problem of the  $n$  divided beam with different boundary conditions was studied in order to understand better the influence of the distributed parameters, rigidity and mass, in the transverse vibrations dynamic. Interdisciplinary group formed by professors in fields of mechanic vibration, numerical methods and pedagogy are discussed proper mean, format and strategy for the implementation of this study. Computing facilities and the Matlab programming, including users interface, were introduced allowing an improvement in the visualization of graphical results with different possibilities of investigations. This work showed to be useful in the learning of the vibration in the continuous systems.

**Key- words:** vibration, beam, interdisciplinary