INVESTIGAÇÃO SOBRE OS OBSTÁCULOS DE APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE LIMITE

Ivanete Zuchi – iva@eps.ufsc.br
Departamento de Matemática
Universidade do Estado de Santa Catarina –UDESC
Campus Universitário Professor Avelino Marcante - Bom Retiro.
89223-100 Joinville-SC

Mirian B. Gonçalves - mirian@mtm.ufsc.br
Departamento de Matemática
Universidade Federal de Santa Catarina-UFSC
Campus Universitário – Trindade.
88040-900 Florianópolis-SC.

Resumo: *Neste trabalho é relatado uma pesquisa sobre a investigação das dificuldades da aprendizagem do conceito de limite apresentada pelos estudantes dos cursos tecnológicos da Universidade do Estado de Santa Catarina -UDESC. As dificuldades relativas ao ensino e à aprendizagem do conceito de limite são há muito conhecidas. Estas dificuldades são encontradas ao longo da história da Matemática, e tem origem há mais de 2500 anos. Pesquisas nesta área têm mostrado que as dificuldades encontradas pelos estudantes vêm de encontro com as dificuldades da concepção do limite ao longo da sua história (TROUCHE (1996))**.** Estas investigações foram desenvolvidas por meio de pesquisas que compreendem aspectos teóricos embasados na Didática Experimental da Matemática, desenvolvida pela Escola Francesa. Foi usada a metodologia de observação participativa em algumas classes ordinárias, registrando e documentando todos os processos envolvidos na aprendizagem dos estudantes no contexto de limites. O enfoque do presente trabalho está vinculado a uma pesquisa em nível mais amplo, sendo que esta, constitui uma das etapas fundamentais, pois através das observações realizadas em sala de aula, pode-se buscar sustentação teórica para as reais dificuldades apresentadas neste contexto para auxiliar na busca de soluções direcionadas para o problema.*

Palavras-chave: Limite, Engenharia Didática, Cálculo Diferencial e Integral.

1. INTRODUÇÃO

As dificuldades relativas ao ensino e à aprendizagem de Cálculo no terceiro grau, especificamente o conceito de limite, são há muito conhecidas. Estas dificuldades são encontradas ao longo da história da Matemática, têm origem há mais de 2500 anos e envolvem os processos de conceitualização e instrumentalização deste conteúdo.

Pesquisas a respeito do ensino e aprendizagem de Cálculo problematizam a apresentação, geralmente formal, dos enunciados matemáticos, de modo linearizado numa cadeia de resultados, que parecem não admitir discussões. Constatamos, por exemplo, no trabalho de TALL (1991) *apud* SAD (1998) que as abordagens correntes para o ensino superior tendem a proporcionar aos alunos o produto do pensamento matemático, enquanto o processo do pensar matemático é relegado. Não se costuma focalizar, de um modo geral, a trajetória completa do pensamento matemático, omitindo-se, muitas vezes, as barreiras que este conhecimento enfrentou desde os primórdios até a concepção final.

Uma compreensão desta história, ajuda a entender porque os alunos de hoje, geralmente, apresentam um grau de dificuldade elevado na aprendizagem do conceito de limite. Uma referência importante é o trabalho de TROUCHE (1996) que tenta fazer um resgate histórico da concepção de limite, trabalhando com a aprendizagem utilizando artefatos tecnológicos (calculadoras que operam numericamente e graficamente). Nesse trabalho são evidenciados as limitações e os erros que podem ocorrer num ambiente puramente algébrico.

A Didática da Matemática tem um papel relevante na busca de novas alternativas de ensino, "*a Didática da Matemática é o estudo dos processos de transmissão e da aquisição de conhecimentos em Matemática, em situações escolar ou universitária (...)Ela descreve e analisa as dificuldades encontradas e propõe meios para ajudar os professores e alunos ou estudantes a superá-las*"(DOUADY (1990)).

Para fazer uma análise das dificuldades encontradas na construção do conceito de limite optou-se por uma metodologia de pesquisa qualitativa, na qual o pesquisador leve a qualidade de observador participante, aliada por anotações sistemáticas em um caderno de campo, gravações e entrevistas do tipo centrada, abordando o conteúdo de limite.

Os dados coletados durante essa investigação estão servindo como base de uma pesquisa mais ampla, em nível de doutorado, sendo que esta investigação constitui uma das etapas fundamentais, pois através das observações realizadas em sala de aula, pode-se buscar sustentação teórica para as reais dificuldades apresentadas neste contexto e então propor soluções direcionadas para o problema.

2. ENGENHARIA DIDÁTICA

Ao sustentar-se na Engenharia Didática, toma-se como um dos objetivos não somente utilizá-la nestas análises, mas mostrar sua importância às investigações do presente trabalho.

Um dos trabalhos mais interessantes realizados pelo professor tem sido o de escolher ou organizar seqüências de atividades que explorem um domínio do conhecimento. Estas seqüências de ensino aparecem, também, como um dos principais objetos da Engenharia Didática.

Para BROUSSEAU *apud* DOUADY (1990) a finalidade da Escola é organizar, em condições normais para os alunos e aceitáveis para os professores, a preparação de protocolos de experiências, a observação de fenômenos didáticos, a coleta e tratamento de numerosas informações, de toda sorte, sobre o comportamento dos alunos em situação escolar durante um período.

A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em classe, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino - seqüências didáticas (CHEVALLARD (1982)).

Segundo DOUADY (1990) a engenharia didática é uma metodologia particularmente adaptada a essas observações, sendo a concepção e a realização da engenharia composta de três etapas:

1ª Etapa: análise *a priori*- Ponto-chave da metodologia. Essa etapa tem como objetivo elaborar seqüências pertinentes de aprendizagem, tendo como meta, ao mesmo tempo, os alunos e o problema didático proposto. Apresenta vários componentes, tais como: estudo epistemológico, o significado matemático (objeto de estudo), levantamento de condutas dos alunos.

2ª Etapa: A engenharia propriamente dita - Nesta etapa estão presentes as elaborações, realizações das seqüências didáticas construídas e a observação dos alunos, do que diz ou faz o professor, e quando. Quais são as regras que norteiam as interações entre os diferentes atores na turma? É possível identificar as regras estáveis (costumes) e as variáveis? Em função de quê?

3ª Etapa : Análise dos produtos das experiências. Interpretação dos resultados e retorno à engenharia didática - Análise e crítica da produção, em relação à problemática inicial. O material é constituído das descrições das seqüências, dos relatórios de aula redigidos pelos observadores, das transcrições dos registros áudio-visuais e da produção dos alunos no decorrer da aprendizagem em provas de avaliação.

Na área da Didática, o termo Engenharia visa introduzir o campo de ação prática ao domínio teórico da mesma. A Engenharia Didática confere à Didática o estudo epistemológico de ciência de ação e não, unicamente, de ciência do conhecimento; atenta às ciências da comunicação, susceptíveis de ajudar o professor a se comunicar com seus alunos, atenta às tecnologias da educação auxiliares às atividades pedagógicas e às progressões e implementações de escolhas didáticas.(DEVELAY (1992) *apud* ROSA (1998)).

A Engenharia Didática, ainda que nova, já ganhou inúmeros adeptos e vem sendo aplicada ao estudo de casos, especialmente no campo da Matemática. ROSA (1998) cita alguns destes, como GRENIER (1988), BAUTIER (1988), LEMONIDIS (1991), VERGNAUD (1987). Podemos ainda citar os trabalhos de CARVALHO (2001), SANGIACOMO (1998), entre outros. E foi neste contexto que se iniciou o desenvolvimento da presente pesquisa, utilizando a metodologia da Engenharia Didática, e com a compreensão que um professor, em sua própria classe, não pode ser simultaneamente ator e observador imparcial, que de acordo com DOUADY (1990) são duas funções contraditórias. Assim, foi realizada em classes ordinárias, na função de observador, uma investigação sobre as dificuldades de aprendizagem do conceito de limite.

3. A PESQUISA DE CAMPO

A pesquisa foi realizada na Universidade do Estado de Santa Catarina-UDESC utilizando o processo metodológico de observador participante, de modo a interferir o mínimo possível no contexto da sala de aula, especialmente, na conduta de professores e alunos ao apresentarem as idéias e soluções de problemas durantes as atividades de aulas de Cálculo, especificamente, dentro do contexto de conceito de limites.

A pesquisa tinha como objetivos realizar uma investigação em sala de aula sobre as dificuldades apresentadas pelos alunos na conceitualização de limites; observar, registrar e documentar as experiências e, posteriormente, buscar sustentação teórica na Didática da Matemática para o encaminhamento das possíveis questões levantadas durante a investigação.

Foram escolhidas para a observação sistemática, durante o primeiro semestre de 2003, três turmas (engenharia Mecânica, Física e Engenharia Elétrica), sendo que nas turmas do curso de Mecânica e Física o observador participou de todas as aulas envolvendo o contexto de limite, na turma do curso de Engenharia Elétrica apenas na introdução do conceito de limite. O número de créditos da disciplina de Cálculo I é de 6 horas semanais.

O registro dos dados coletados pelo observador foi realizado através de anotações sistemáticas, em um caderno de campo, gravações de aulas e entrevistas do tipo centrada, na qual, dentro da hipótese de certos temas, o entrevistador deixa o entrevistado descrever livremente a sua experiência pessoal a respeito do assunto investigado (THIOLLENT (1990) *apud* SAD (1998)).

Descreve-se a seguir, alguns itens mais pertinentes, observados durante a investigação:

3.1 Perfis das turmas

A turma do curso de Engenharia Mecânica era composta de 33 (trinta e três alunos) porém 30 (trinta) alunos responderam o questionário. A grande maioria dos alunos encontrava-se na faixa etária dos 17(dezessete) à 19 (dezenove) anos, sendo que destes, apenas dois alunos não estavam cursando a disciplina pela primeira vez (repetentes). Todos os alunos que estavam cursando a disciplina pela primeira vez dispunham de tempo integral aos estudos (não trabalhavam). 100%(cem por cento) da turma dispunha de acesso a computador, sendo que a grande maioria dispunha de computador em casa.

A turma do curso de física era composta de 10 (dez) alunos, sendo que 70% (setenta por cento) encontravam-se na faixa etária acima de 20 (vinte) anos. Todos os alunos já tinham cursado a disciplina de cálculo I, sendo que a maioria mais de uma vez. Apresentavam-se no quadro desta sala, alunos que estavam cursando esta disciplina pela quarta vez. 50% (cinqüenta por cento) da turma trabalhava em tempo parcial e 20% (vinte por cento) em tempo integral. Quanto ao acesso a computador 30% (trinta por cento) não possuia acesso a computador.

A turma do curso de Engenharia Elétrica composta de 30 alunos, sendo que destes 21 (vinte e um) alunos participaram da pesquisa, com 76% (setenta e seis por cento) na faixa etária de 17 à 19 anos, e sendo, aproximadamente, 86% (oitenta e seis por cento) cursando a disciplina pela primeira vez . Todos os alunos dispunham de tempo integral para os estudos (não trabalhavam) e, praticamente todos dispunham de acesso a computador.

O material de referência da disciplina utilizado em todas as turmas era o mesmo, uma apostila produzida pelo coordenador de cálculo I. Nesta apostila o aluno tem a disposição o conteúdo, exemplos resolvidos e lista de exercícios. A forma de avaliação, não somente destas turmas, mas sim de todas as turmas de engenharia, na disciplina em questão, é unificada, isto é, os professores que trabalham com Cálculo I, se reúnem, discutem e elaboram a avaliação em conjunto, e esta é aplicada em um horário extra (sábados). No início do semestre, os alunos contam com aulas de revisão de matemática básica e, durante o semestre, além dos horários de atendimento dos professores tem um monitor que auxilia no esclarecimento de dúvidas.

3.2. Principais dificuldades registradas

Observou-se que as dificuldades começam a aparecer desde o conceito intuitivo de limite, pois trabalha-se com números infinitesimais, com os quais o estudante não está acostumado. Também dependendo da situação utilizada, com a noção do infinito, por exemplo, aproximar a área de uma figura por n retângulos. As primeiras barreiras já começam a surgir neste contexto. Ao formalizar o conceito de limites, os obstáculos aumentam, pois neste momento, o aluno se depara com a formalização da linguagem matemática, a qual muitas vezes ele não entende. A falta de uma base em matemática básica torna-se evidente, ao lidar com conceitos de funções modulares.

As principais dificuldades encontradas na compreensão do conceito de limites, destacadas pelos alunos, foram provenientes dos seguintes fatores: compreensão da relação entre ε (número positivo muito pequeno) e δ (δ =δ(ε)>0); a noção de infinito; abstração; matemática básica e a aplicação prática de limites.

Nas dificuldades relativas à compreensão da relação entre δ e ε, registramos os seguintes depoimentos: "*Minha maior dificuldade na compreensão do conceito de limite é entender o que significa* ε e δ *e o porque de encontrar sua relação."* (estudante do curso de Engenharia Mecânica); *" A idéia de associação das vizinhanças δ e ε ."* (estudante do curso de Engenharia Elétrica).

"Estabelecer a famosa vizinhança entreδ e ε, nunca entendia como isso funcionava" (estudante do curso da Física).

"Semestre passado não tivemos um bom aproveitamento (...) Não entendia nada sobre limite. δ e ε, grandezas infinitesimais. Compreensão de funções, etc..(...)"(estudante do curso da Física). Outro obstáculo, também registrado, é a noção do infinito, como observa-se no depoimento desse estudante ao ser questionado sobre qual foi a maior dificuldade na compreensão do conceito de limite, *"Acho muito complicado pensar em infinito." o infinito é a prova da ignorância do ser humano"(Voltaire)"* (estudante do curso de Engenharia Mecânica). Esta dificuldade, também foi registrada nos estudantes da física :*"quando eles tendem a ±∞, para escolher* ε e δ é um pouco complicado..."(estudante do curso de Física)

No que se refere a abstração, de acordo com um estudante do curso de Engenharia Elétrica, "*é um assunto abstrato, você não sabe, no início, o que está estudando",* também na ótica do estudante do curso de Engenharia Mecânica *" a maior dificuldade é por ser um assunto abstrato e que abandona muitas regras que até agora eram levadas como verdade absoluta"* **.**

Um estudante do curso de Engenharia Mecânica comenta sobre o ensino baseado em "decoreba", na falta de raciocínio lógico na aprendizagem de um determinado conteúdo. De acordo com o mesmo, a principal dificuldade é "e*ntender o raciocínio utilizado para se chegar ao resultado desejado uma vez que, eu assim como a maioria dos colegas, vem do ensino médio e pré-vestibular onde a utilização de macetes e regrinhas acabavam substituindo o raciocínio por uma questão de praticidade e ganho de tempo".* (estudante do curso de Engenharia Mecânica).

Outro ponto, dado com bastante ênfase pelos estudantes, das turmas em geral, é a falta da matemática básica. Eles acabam errando muitas vezes, nas contas por falta de base, principalmente, nas funções modulares. Simplificar as expressões, também acaba representando um obstáculo, no desenvolvimento do cálculo de limite. Os depoimentos a seguir, confirmam esta tese. De acordo com um estudante do curso de Engenharia Mecânica *"a maior dificuldade é desenvolver a equação para achar o limite e sair de uma indeterminação"* e na visão de um estudante do curso de Física *" o problema está na base (funções e inequações)"* e um estudante do curso de Engenharia Elétrica complementa *" a dificuldade está em lembrar algumas operações básicas do* $1^{\underline{o}}$ *e* $2^{\underline{o}}$ *grau."*

Uma das grandes agitações, logo após a explanação do conceito intuitivo de limite, dentro da sala de aula, é o questionamento por partes dos alunos, no que se refere a aplicação prática do limite: " professor a onde a gente vai utilizar isto?", "dê exemplos práticos, professor". Os professores explicitaram alguns exemplos práticos da aplicação de limites. Um professor utilizou como exemplo, a produção de uma empresa, falando que sabendo qual era o lucro pretendido alcançar, o quanto ele poderia mexer nas variáveis, de modo a obter um lucro tão próximo quanto o desejado. Um outro professor utilizou como exemplo, o preparo de uma massa instantânea (popular "miojo"). Sabendo que o tempo de cozimento da massa é de 3 (três) minutos, se utilizar um tempo muito superior (δ) a 3 (três) minutos o resultado da massa será "papa", caso um tempo muito inferior a 3 (três) minutos, conseqüentemente, massa crua e, complementando que quanto mais próximo de 3 (três) minutos terão como imagem, "uma massa gostosa". Mas observamos, que a curiosidade de nossos alunos, em saber onde aplicar um determinado conteúdo, diz respeito a sua respectiva área. De acordo com alguns estudantes, a maior dificuldade se encontra em *"entender na prática a aplicação de limite"* (estudante do curso de Engenharia Elétrica), *"onde vou utilizar ?"* (estudante do curso de Engenharia Mecânica), "*Por não ter tido limite no 2º grau, fica um pouco complicado pra compreender o conceito de limite, principalmente, onde e como aplicarmos isso"* (estudante do curso de Engenharia Elétrica).

Alguns estudantes, através de seus depoimentos, deixam claro, que os obstáculos na aprendizagem do conceito de limites podem estar relacionados, não somente a um dos aspectos destacados acima, mas englobam todos e, inclusive, outros que não foram descritos, como podemos ver a seguir:

" *Tive todas as dificuldades, ou seja, não compreendi o que é limite."* (Estudante do curso de Engenharia Mecânica).

" Acho que nem compreendi o conceito..." (Estudante do curso de Engenharia Mecânica).

"Nunca haverá ninguém capaz de me explicar o conceito básico, em linguagem cotidiana."

(estudante do curso de Física).

"a base de limite é muito complicada pra mim, não tem um sentido lógico, é uma função muito complexa." (estudante do curso de Física).

"eu acho muita loucura pensar em um número extremamente próximo do outro em que não existe um resultado indeterminado, aliás, retirar a indeterminação do resultado é algo de que se tem de pensar muito." (Estudante do curso de Engenharia Elétrica).

3.3. Avaliação

Após os professores, em suas respectivas turmas terem apresentado o conteúdo de limite, tendo já trabalhado com o conceito intuitivo, a formalização da definição, propriedades e cálculo de limites, e tendo os alunos trabalhado com resolução de exercícios em grupo, durante as aulas, foi solicitado, por escrito, que o aluno descrevesse, em poucas palavras o que ele entendia por limite, dando ao mesmo a seguinte pergunta: " *Explique o que significa para você a expressão o limite de uma função f(x) quando x→a é um número b*."

A seguir algumas das respostas:

" *Quer dizer que quando x→a, a imagem da função tende a b, sem nunca alcançar a b."*

"Quando o x se aproxima do termo a, a função f se aproxima de y"

" Que o limite desta função, ou seja seu resultado, estará entre um intervalo muito próximo de b, quando a incógnita nesta função for x perto de a.

"Quando você coloca um número x próximo, mais muito próximo de a o valor de f(x) ou y obterá como resultado um valor muito próximo de b"

"Que o máximo valor que a função f pode atingir quando x está tendendo para a é um b."

" É que o limite é como se fosse uma barreira, é um número que não pode ser tocado para não quebrar o limite. Ex. se a velocidade máxima permitível em uma estrada é de 100

Km/h, existe uma rotação no motor de que não pode ser ultrapassado, pois senão vai ultrapassar a velocidade máxima da pista".

"Limite de uma função é analisar o mínimo é o máximo campo de atuação do domínio".

"x é uma margem de erro para mais ou para menos"

"Eu entendo por limite o que eu posso sercar um acontecimento p/ que outra possa ser possível ou que aconteça".

" Só sei que é um valor máximo aproximado que um número chega. Mas não se "encontra" com o mesmo.".

"Dependendo do "a", se for pequeno ou grande, o quanto, pode variar sem interferir na função. É quanto pode variar a tolerância de um número sem interferir no resultado final".

" Entendo por limite que é o limite máximo de um número até outro número".

"b é um número tão próximo quanto eu queira de "a" que x pode assumir antes de ser "a"."

"Qdo x se aproxima ao número "a" a f(x) se aproxima, tanto pela esquerda qto pela direita de "b".'

" Quando um número qualquer (x) tende para um "a" conhecido, sua imagem, ou seja, f(x) tende para um número também conhecido "b". lembrando que não interessa o que acontece em "a" e sim em sua proximidade".

Não foi listado, aqui, todas as respostas, apenas algumas que ilustram o processo dos obstáculos referente a formalização de um conceito. Pode-se observar, presencialmente, a dificuldade deles descrever, com as próprias palavras, as expressões dadas acima. Ouviu-se, muitos dizerem: "eu sei o que significa, mas não sei como escrever". Os alunos, geralmente, não compreendem a definição, decoram fórmulas para usar na resolução de um determinado exercício e, quando se deparam com alguma situação que exige o conhecimento de conteúdo, não sabem resolver o problema em questão.

Na avaliação, realizada pelos alunos, após terem tido todo conteúdo programático referente a limites, foi observada uma questão em particular, por estar mais ligada ao contexto desta investigação. A questão dada era: "usando a definição de limite, estabeleça a relação de vizinhança entre δ e ε, conveniente para o caso de $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{2x+2}\right)=2$.

Poucos alunos, de modo geral, conseguiram resolver a questão. Na turma de Engenharia Elétrica 30% (trinta por cento) resolveram corretamente a questão, na turma do curso de Engenharia Mecânica 50% (cinqüenta por cento) e 10% (dez por cento) na turma do curso de Física resolveram corretamente a questão. Este resultado evidencia a dificuldade que os alunos já apontavam, na sala de aula, ao trabalharem com o infinito. E também retoma a dificuldade, relatada, pelos estudantes, em entender a relação entre o δ e ε. Sem a compreensão desta relação, não é possível encontrar a solução da questão proposta.

De posse de todos os dados descritos acima, procurou-se pesquisar na história da matemática, especificamente, no contexto de limites, como aconteceu o processo de concepção do mesmo, e quais foram os obstáculos epistemológicos que permearam a conceitualização e instrumentalização de limites, tendo como objetivo, uma melhor compreensão deste processo. Na seqüência da pesquisa em questão, através deste entendimento, serão propostas soluções que possam contribuir para a melhoria do processo ensino-aprendizagem de limite.

4. OS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS DO CÁLCULO

Pode-se observar e registrar que os obstáculos são evidentes no processo de ensino e aprendizagem de cálculo, especificamente, no conceito de limite. Pesquisas nesta área têm mostrado que as dificuldades encontradas pelos estudantes vêm de encontro com as dificuldades da concepção do limite ao longo da sua história (TROUCHE (1996)).

De acordo com BACHELARD (1938) "*Quando se buscam as condições psicológicas do progresso da ciência, chega-se logo a essa convicção de que é em termos de obstáculos que é necessário colocar o problema do conhecimento cientifico (...) é no ato mesmo de conhecer, intimamente, que aparecem, por uma espécie de necessidade funcional, lentidões e perturbações. É lá que nós mostraremos as causas da estagnação e mesmo da regressão, é lá que* nos descobriremos as causas da inércia que chamaremos de obstáculos epistemológicos." (BACHELARD (1938) a*pud* ARTIGUE (1989)).

A origem das idéias fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral encontra-se na história da Matemática grega. Segundo a História, os gregos possuíam, já na época em que Euclides escrevia "*Os Elementos*", quase todos os fundamentos para desenvolver o Cálculo, mas ficaram presos por algumas concepções restritivas. Foram os gregos os primeiros a procurar a compreensão dos fenômenos ligados ao infinito, ao contínuo, ao infinitésimo, em busca de uma explicação para o movimento e as transformações dos seres. Da idéia de movimento virão os primeiros conceitos do Cálculo Diferencial e Integral (BROLEZZI (1999)).

Segundo BOYER (1974), o Cálculo teve sua origem nas dificuldades encontradas pelos antigos matemáticos gregos na sua tentativa de expressar suas idéias intuitivas sobre as razões ou proporções de segmentos de retas, que vagamente reconheciam como contínuas, em termos de números, que consideravam discretos.

A grande dificuldade encontrada pelos alunos em relacionar e entender o que significa ε e δ (números infinitamente pequenos) também é encontrada na história da concepção de limite. Um dos primeiros a fazer o uso de quantidades infinitamente pequenas, ou infinitésimos, como mais tarde passaram a ser chamados, foi Cavalieri, no século XVII, um matemático jesuíta que se considerava discípulo de Galileu. Cavalieri mostrou que era possível calcular os volumes de corpos sólidos mediante a suposição de que eram feitos de números imensos de lâminas infinitamente finas que chamou de indivisíveis. (MORRIS 1998)).

Mas o que é uma quantidade infinitamente pequena? Na história da Matemática, muitos se esforçaram para definir, mas ninguém foi capaz, nem Leibniz e Newton. De acordo com MORRIS (1998), Newton fez várias tentativas diferentes para definir os infinitésimos, mas nenhuma foi muito precisa. Leibniz falava de quantidades "tendentes a zero" ou infinitamente pequenas, mas foi incapaz de dar uma definição clara. A natureza dos infinitésimos era de fato um mistério e, em alguns casos, as respostas só pareciam piorar as coisas (...) fica evidente que grandes mentes podiam ficar estonteadas quando lidando com o infinitamente pequeno, assim como o infinitamente grande.

Quanto a dificuldade dos alunos em aceitar o termo "infinito", foi possível analisar que os antigos matemáticos também refutaram muito este termo. Em 1784, a Academia de Ciências de Berlim ofereceu um prêmio para a melhor solução para o problema do infinito. Cerca de 23 artigos foram analisados, chegando-se a conclusão que nenhum era satisfatório. Entretanto, a academia concedeu um prêmio ao matemático que, segundo o comitê, mais se aproximava de realizar suas intenções. Tratava-se do matemático Simon L´Huiller, que agregou a seu artigo

"Exposição elementar do cálculo superior" o seguinte mote: "*o infinito é o abismo em que nossos pensamentos são tragados.*" (MORRIS (1998)).

Ao longo da história, em todos os períodos, a idéia do infinito parece ter desafiado o poder de compreensão do ser humano. O infinito, seja ele relacionado com o infinitamente grande ou infinitamente pequeno, continua ainda hoje, sendo obstáculo na aprendizagem de nossos estudantes. Matematicamente, o infinito aparece em muitas situações, existem infinitos números em uma reta, há uma infinidade de números compreendidos entre dois pontos de uma reta, entre tantos outros exemplos, mas como nos descreve MORRIS (1998) "(...) *a história do conceito do infinito, não é uma história matemática. É antes uma história da evolução do pensamento científico e de como é possível se pensar em algo que transcende qualquer possibilidade de compreensão*".

Muitos matemáticos se esforçaram para dar ao cálculo um fundamento lógico. O cálculo ganhou finalmente uma fundamentação sólida no século XIX. Em 1821, Cauchy publicou *Cours d´analyse*, em que esboçou uma maneira de eliminar o espinhoso conceito do infinitésimo, através do conceito de limites. 50 anos mais tarde Weierstrass refinou os métodos de Cauchy, demonstrado finalmente que era possível dar um fundamento lógico ao cálculo.

Os trabalhos de Newton e Leibniz foram ampliados, gerando grande sucesso. O cálculo estimulou a criação de novos ramos da matemática e numerosos problemas em física e matemática foram resolvidos.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na realização da investigação do presente trabalho foi constatado que os obstáculos estão presentes na aprendizagem do conceito de limite. Esses obstáculos são, na maioria das vezes, responsáveis pelas barreiras que os estudantes enfrentam em sua vida acadêmica, principalmente, para os alunos das ciências exatas e afins.

Tais obstáculos não são frutos apenas dessa geração de estudantes; muitos destes já estavam presentes antes mesmo da concepção de limite; são os denominados obstáculos epistemológicos.

É importante ressaltar que a história faz parte de qualquer processo de construção, em particular, do processo de construção do conceito de limite. Por isso ela foi utilizada para confrontar e ou comparar os atuais obstáculos apresentados pelos estudantes com àqueles apresentados ao longo da história.

Foi observado que faz-se necessário repensar sobre o ensino do conceito de limite. A Didática da Matemática tem um papel relevante neste contexto, pois como citado anteriormente, ela descreve, analisa os dados e propõe soluções para professores e alunos. A presente pesquisa não tem um caráter conclusivo, por si só, constitui-se em uma das etapas fundamentais, pois através desta, foi constatado que é preciso criar novas ferramentas que possam auxiliar aos professores e alunos no processo de ensino aprendizagem do conteúdo em questão. O embasamento teórico da Didática auxiliará na construção de uma nova metodologia que visa possibilitar ao estudante uma aprendizagem mais significativa.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE, M. Une recherche d'ingéniere didactique sur l'enseignement des équations différentielles en premier cycle universitaire. In: **Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble**, pp.183-209, Ed. IMAG, Grenoble. 1989.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 1974, 488 p., p. 87.

BROLEZZI, A.C. Raízes do Cálculo na Grécia Antiga. In: **Revista da Pesquisa & Pós-Graduação** da UFOP. Ano 1, volume, número 1, janeiro/junho de 1999.

BROUSSEAU, Guy. **"Os diferentes papéis do professor"**, In: Didática da Matemática – Reflexões Psicopedagógicas. Organizadoras: Cecília Parra e Irma Saiz, Editora Artes Médicas – Porto Alegre – RS. 1996.

CARVALHO, N.T.B. **Le sort des problèmes de constructions dans le contexte français de l'enseignement des transformations géométriques au lycée dans les années 1990**. 2001. Tese (Doutorado) - Université Joseph Fourier - Grenoble 1.

CHEVALLARD, Y. **Sur l'Ingénierie Didactique, Deuxième École d'Éte de Didactique des Mathématiques**, Olivet.1982.

DOUADY, R. A Universidade e a Didática da Matemática: os IREM na França. In: **Caderno da RPM**. Volume 1, número1, 1990.

MORRIS, R. **Uma Breve História do Infinito: dos paradoxos de Zenão ao universo quântico.** Tradução de Maria Luiza X de A. Borges. Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editor, 1998.

ROSA, S. B. **A integração do Instrumento ao Campo da Engenharia Didática: o caso do perspectógrafo.** 1998. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção). Universidade Federal de Santa Catarina.

SAD, L. A. **Cálculo Diferencial e Integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos**. 1998. Tese (Doutorado em Educação Matemática)-Universidade Estadual Paulista-UNESP, Rio Claro.

SANGIACOMO. L**. O processo de mudança de estatuto: de desenho para figura geométrica – uma engenharia didática com o auxílio do Cabri-Géomètre**. 1996. Dissertação (mestrado em Educação Matemática). Pontifica Universidade de São Paulo.

TROUCHE, L. **A Propos de l'Apprentissage des limites de functions dans um environnement calculatrice. Etudes des rapports entre processus d'Instrumentation.** 1996. Tese (Doutorado em Didática da Matemática), Université Montpellier II. Sciencies et Techniques du Languedoc.

Abstract: *The aim of this research was described an inquiry about barriers in the learning process on the introduction of limits concepts. This study was done with students enrolled in technological courses at Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC).Since a long time ago the scientific community has known quite well that students have these difficulties which are clearly found in the Mathematics' History. Researches in this issue have been showing that these difficulties founded by the students are related to the limit conception through out the its history (TROUCHE (1996)). These inquiries have been done by theoretical aspects using the Experimental Didactics of Mathematics developed by the French School. It was applied a "participative" observation in some ordinary classes. During the classes whole methodologies involved in the learning process of limits context were taken notes. This study is a part of a wide project that needs data from our reality to solve the problem. Therefore it is "postulated" that observing classrooms (observing and taking notes) will able us to look for more theoretical sustentation in order to propose new suggestions to improve the actual learning process of limits concepts.*

Key-Words : *Limits, Didactic Engineering, Differential Calculus*.