COBENGE 2003

USO DE PROJETOS NO ENSINO DO CÁLCULO.

Virginia M.L. Pereira– vmaurell@ism.com.br
Universidade Santa Ursula
Luiz M. P.Carvalho – luizmc@uerj.br
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Resumo: *A docência no ensino superior vem sendo estimulada a promover mudanças substanciais na sua prática pedagógica e na articulação entre os vários conteúdos de Matemática, especialmente de Cálculo. A inserção de ambientes virtuais e sua possibilidade de simulação de resultados, e a sofisticação tecnológica de calculadoras científicas têm provocado grandes mudanças nas salas de aula dos cursos de ciências exatas. As alternativas disponibilizadas pela inclusão de novas tecnologias fizeram repensar o currículo dos cursos de Engenharia e a abordagem de seus conteúdos. Este texto é resultado de pesquisa promovida junto ao Centro de Engenharia da Universidade Santa Ursula quanto à utilização de práticas de resolução de problema como metodologia de ensino dos conteúdos de Cálculo no ciclo básico. O objetivo da pesquisa era o de analisar o papel de diferentes representações matemáticas no estudo de um problema seja a partir de dados coletados, de representações gráficas e expressões analíticas. Em especial, trataremos de problemas de máximos e mínimos de funções através de uma abordagem que combine o desenvolvimento histórico de suas representações com o uso das novas tecnologias de ensino.*

Palavras-chave: *Ensino de cálculo, Resolução de problemas, Representações matemáticas.*

1. INTRODUÇÃO

Em virtude de crescentes dificuldades percebidas no desenvolvimento de conteúdos dos cursos de Cálculo, professores do Instituto de Educação Matemática da Universidade Santa Úrsula (IEM/USU) formaram um grupo de pesquisa de novas metodologias no ensino de Cálculo. Um dos objetivos da formação do grupo era o de buscar, dentre a bibliografia existente, recursos que indicassem novas opções para o desenvolvimento de um Curso de Cálculo. A intenção principal era a de pesquisar nos centros de pesquisa, quais aspectos pedagógicos e curriculares que poderiam interferir nos cursos iniciais de Cálculo, sabidamente fonte de obstáculos para os alunos e um sério entrave tanto na sua vida acadêmica quanto na sua disposição de apreender novos conceitos. O ingresso nas universidades constitui a passagem do aluno para níveis mais elaborados de conhecimento matemático. Esta passagem tem se realizado com barreiras, por vezes intransponíveis, na área da cognição e na realização das conexões dos novos conhecimentos com dados anteriores.

Fruto das reuniões do grupo dos professores de cálculo do IEM/USU, fez-se a opção de pesquisar métodos alternativos nas estratégias de ensino. Essas estratégias deveriam seguir as novas tendências, em que se utilizasse o desenvolvimento de projetos como ferramenta pedagógica e a análise histórica do conteúdo escolhido para entender a gênese daquele conceito, conforme já tem sido tratado como nos livros de Santos(2002) ou de Hughes-Hallett (1998). Mais do que o interesse histórico, o estudo das dificuldades encontradas na construção de uma teoria, pode ser de grande auxílio na visão que temos das dificuldades encontradas pelos alunos. Para tanto verificou-se que a unidade de máximos e mínimos envolveria uma grande variedade de conceitos de cálculo e para tanto foi objeto da análise deste texto.

A análise e a comparação entre o processo histórico e o processo individual do aluno são defendidas por Piaget&Garcia (1989) no seu último livro *Psicogênese e a história da ciência*. Neste livro Piaget realiza um estudo da origem e da evolução das funções psíquicas (psicogênese ou psicogenia) na formação do pensamento científico na física, álgebra e geometria. Em 1997, James Kaput, professor da Universidade de Dourthmouth, EUA, procura estender as etapas de desenvolvimento de Piaget&Garcia para analisar o desenvolvimento histórico do Cálculo, baseado nos mesmos princípios enunciados por Piaget pela análise da "filogenia x ontogenia"[1].

Da necessidade de analisar ferramentas e metodologias para determinação da solução de problemas de máximos e mínimos, foi preciso tomar como base os textos originais de Euclides, Fermat, Newton e Leibniz, e de historiadores como Tihkomirov(1990), Baron(1908), Struik(1950) ou Edwards(1979). Como surgiram ao longo da pesquisa diferentes representações do problema, os textos de Kaput(1997) foram objeto de estudo para entender as conexões entre diferentes representações matemáticas.

A adoção dos métodos de resolução de problemas segue tendência observada nos textos mais recentes de cálculo. A elaboração de projetos como instrumento que influi diretamente na capacidade do aluno perceber as diferentes representações envolvidas no conceito de máximos e mínimos, está previsto em textos como os de Ângela R. Santos & Waldecir Bianchini (2002), Débora Hughes Hallett (1998), Edwards (1979) ou Ed Dubinsky (1997) . Tomando como base estes textos, é apresentado projeto em que são discutidas as representações matemáticas historicamente determinadas.

2. DA HISTÓRIA DO CÁLCULO

A primeira questão que se deve compreender diz respeito ao papel da História da Matemática como instrumento de uso didático. Os conhecimentos em História da Matemática permitem compreender melhor de que forma ocorreu a construção de um conceito e entender a sua importância como pré-requisito de outro. Vale dizer que, sem a perspectiva crítica que a história nos dá, o processo de conhecimento perde em qualidade, uma vez que ele aparece desvinculado de sua contextualização e alheio a origem, utilidade e pertinência. Saber como, pouco a pouco, foram sendo forjados os conceitos e as notações matemáticas, serve também para compreender melhor certos erros dos nossos alunos e poder pôr em prática propostas didáticas mais adequadas para uma apropriação progressiva de certos conceitos. Este ponto de vista relacionando o surgimento histórico de um conceito ao do entendimento de um conceito por um indivíduo diz respeito às teorias desenvolvidas por Piaget & Garcia (1989) quanto a filogenia x ontogenia.

---

[1] Princípio que busca comparar o desenvolvimento da espécie humana (filogênese) com o desenvolvimento do indivíduo humano (ontogênese) para compreender a origem e a trajetória desses dois fenômenos

Não é apenas a aplicação de um conceito que gera o interesse pelo assunto: são também necessárias motivações de natureza intelectual e criativa. A escolha do texto didático é parte importante do projeto pedagógico de um curso. Devem ser evitados os textos que privam o aluno da exploração da construção do conceito, que muitas vezes, são resultado de um processo de desenvolvimento teórico de um ou dois temas centrais que perduraram durante séculos.

Todo conhecimento novo passa por uma fase de acomodação a partir da reconstrução da rede existente de conhecimento e da assimilação do conceito, conforme o entendimento de Piaget (1989) quanto à aprendizagem. Nesse sentido, o uso da história da matemática é um auxiliar para que professores e alunos entendam e superem as barreiras no desenvolvimento do conhecimento matemático. As dificuldades encontradas pelos alunos levam a que nos interroguemos, e a história pode permitir-nos imaginar outras estratégias de ensino. Sob o aspecto do currículo, fica evidente que a escolha de temas que enfoquem o desenvolvimento histórico do conceito, dá ao aluno a contextualização necessária para a compreensão do tema.

Por outro lado, também se pode notar que os textos originais trazem uma seqüência de conceitos que passaram por fases históricas e filosóficas estranhas aos nossos alunos. O enfoque excessivo nos métodos dedutivos limita a visão do aluno a apenas uma forma de representação matemática. Pode ser um caminho a seguir a reconstituição de uma seqüência numa cadeia lógica de modo que definições, processos dedutivos ou representações gráficas, no seu conjunto, venham a produzir maior significado matemático.

3. DAS REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS

Segundo Kaput (1989), todas as conexões em modelos de representações, como os mapas conceituais, devem ter como objetivo detectar as regularidades que encontramos quando mudamos de um sistema de representação para outro. As conexões entre diferentes sistemas de representação ocorrem quando são detectadas regularidades e invariâncias entre eles. A ação de mudar de representação permite comparar e reorganizar o conceito, promovendo a reflexão necessária para assimilação e abstrações no futuro. Ainda segundo o mesmo autor, a variedade nas representações de um conceito enriquece as atividades de onde são adquiridas as experiências.

Ao fazer a análise histórica da evolução do cálculo por uma visão das teorias de Piaget&Garcia, Kaput (1989) toma por base um modelo das interrelações entre sistemas algébricos e os períodos de desenvolvimento do conceito de derivada apresentados por Grabiner (1983). As translações entre os sistemas algébricos são parte importante na análise do desenvolvimento do cálculo uma vez que a linguagem de seus conteúdos é essencialmente algébrica. Segundo Grabiner (1983), são quatro as fases associadas à derivada: a) o surgimento na solução de problemas como determinação de tangentes e quadraturas (antes de Newton e Leibniz), b) quando foi criada (Newton e Leibniz); c) quando foi explorada e desenvolvida, no século XVIII; e d) quando foi finalmente definida no século XIX. Cada uma dessas etapas veio acompanhada de expressivos avanços nas formas de representação do problema. No texto de Kaput (1989) fica evidenciado que esta evolução está condicionada à própria formação do conhecimento dos seus níveis mais particulares, como ocorria até Newton e Leibniz aos níveis de generalização obtidos após Newton e Leibniz.

Do que vimos nos textos de autores, como Baron (1908) ou Edwards (1979), que pesquisaram o cálculo, podemos afirmar que as fases indicadas por Grabiner (1983) são fruto das representações matemáticas disponíveis em cada período. No período anterior a Newton e Leibniz podemos retroceder aos gregos na busca da solução dos problemas de determinação de valores extremos. Dos gregos podemos dizer que foram os responsáveis por estabelecer os fundamentos da lógica, tão importantes para a formação das estruturas matemáticas. Da idade média teremos importantes contribuições na utilização de tabelas e gráficos, como os tratados por Ptlolomeu e Oresme. Com o desenvolvimento das estruturas algébricas e suas propriedades, como as desenvolvidas por Cardan e Viete, e com o advento dos algoritmos de dedução de valor extremos, como os encontrados nos textos de Kepler e Fermat, estão assegurados os elementos necessários às estruturas gerais da otimização. .

Kaput relaciona essas diferentes formas de representação matemática como conexões que podem ser estabelecidas seguindo o esquema reproduzido na "Figura 1"

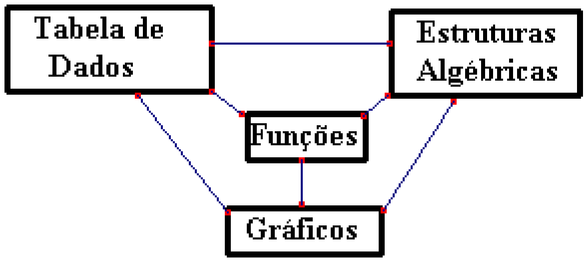
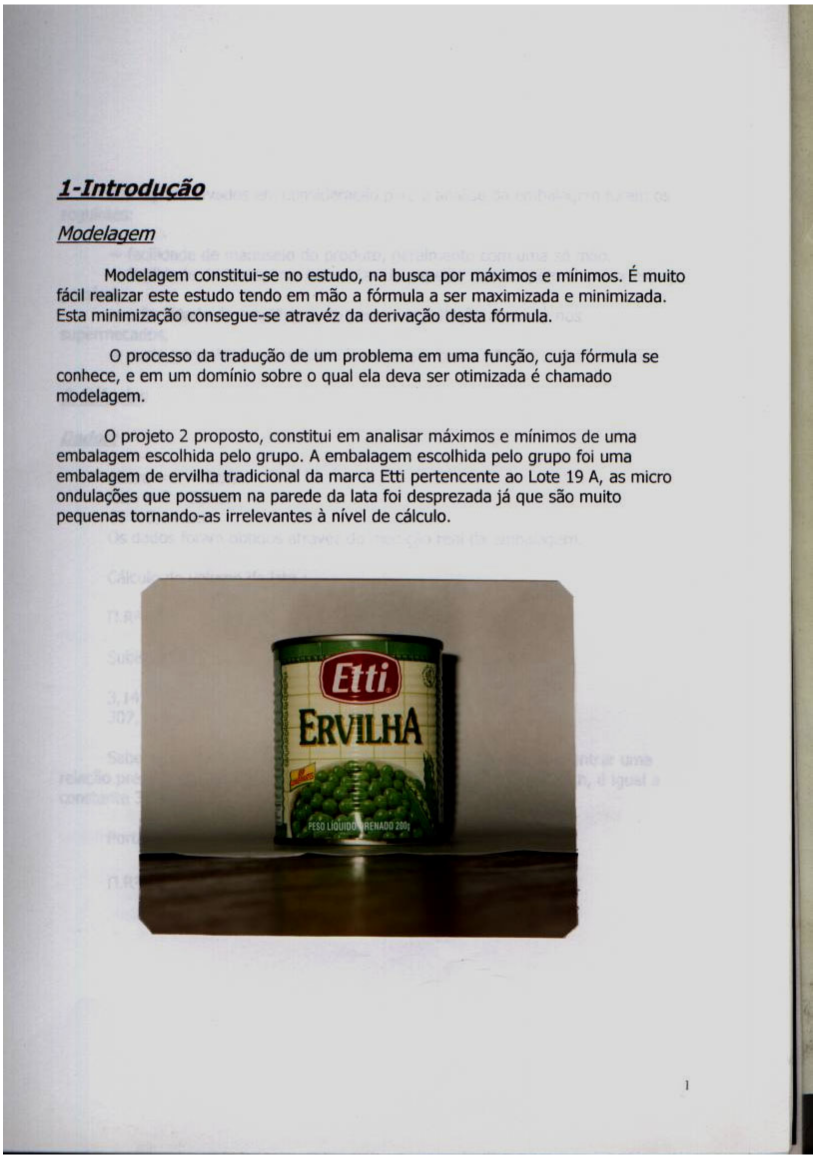


Figura 1

A metodologia de resolução de problemas vem discutir as diferentes abordagens em situações que admitem soluções distintas. Isso decorre do fato que as representações internas de cada um interferem no processo da escolha do método e do seu desenvolvimento. A base do seu conhecimento vem sendo moldada por analogias e de ligações com conhecimentos anteriores. Assim sendo, o que se deseja verificar é se a metodologia de discutir diferentes representações, e não apenas seguir o passo a passo de algoritmos, é capaz de produzir conclusões com maior significado matemático. Veremos a seguir como os alunos realizaram as conexões entre os diferentes sistemas de representação no desenvolvimento de seu projeto.

4. DOS PROJETOS

No projeto estudado, foi proposta uma discussão das condições de embalagem de um produto a ser escolhido pelo grupo. Foi interessante observar, como podemos ver na Figura 2, que foi necessário discutir a embalagem a partir de alguma representação interna do objeto e não da discussão de um objeto novo. A partir da escolha da embalagem surgiu a necessidade de algumas definições sobre o modelo, bem como qual a função a ser otimizada, suas restrições e em que condições o modelo estaria de acordo com a realidade. A "Figura 2" mostra ainda que os argumentos de escolha do ótimo serão pautados pelo uso de métodos dedutivos, como descrito no primeiro parágrafo.



1-Introdução

Modelagem

Modelagem constitui-se no estudo, na busca por máximos e mínimos. É muito fácil realizar este estudo tendo em mão a fórmula a ser maximizada e minimizada. Esta minimização consegue-se atravéz da derivação desta fórmula.

O processo da tradução de um problema em uma função, cuja fórmula se conhece, e em um domínio sobre o qual ela deva ser otimizada é chamado modelagem.

O projeto 2 proposto, constitui em analisar máximos e mínimos de uma embalagem escolhida pelo grupo. A embalagem escolhida pelo grupo foi uma embalagem de ervilha tradicional da marca Etti pertencente ao Lote 19 A, as micro ondulações que possuem na parede da lata foi desprezada já que são muito pequenas tornando-as irrelevantes à nível de cálculo.

1

Figura 2

Os cálculos desenvolvidos se ajustam às expressões algébricas da área lateral e do volume da lata. As Figuras 3, 4 e 5 mostram que o problema foi analisado por meio de diferentes associações:

a) Na Figura 3, temos as relações entre funções e expressões algébricas:

Ao usar a substituição dos dados encontrados no objeto escolhido na expressão algébrica que representa o volume da lata, o grupo percebeu que, se mantido o valor ideal de volume, criar-se-ia uma dependência entre raio e altura. Essa característica de dependência entre variáveis representa uma das grandes dificuldades a ser enfrentada no conceito de função. As relações entre a prática e um conceito de tamanha complexidade podem ser fortemente exploradas.

2-Cálculos

Dados:

Altura = h = 8cm
Raio = R =3,5cm
Π = 3,14 cm
Os dados foram obtidos atravéz da medição real da embalagem.

Cálculo do volume da lata :

$\Pi.R^2.h$

Subistituindo:

$3,14*(3,5)^2*8=$
$307,7cm^3$

Sabe-se que R não é independente de h e vice-versa. Para encontrar uma relação precisa, usa-se o fato de que o volume da lata cilíndrica, $\Pi.R^2.h$, é igual a constante $307,7cm^3$.

Portanto:

$\Pi.R^2.h = 307,7cm^3$

Figura 3

b) Na Figura 4, vemos que o grupo realizou uma associação entre tabela de dados e valores obtidos pelos algoritmos. Partindo dos dados obtidos pelo modelo, realizaram-se variações em torno do raio e da altura da lata, e o que se verificou é que a área necessária para a embalagem não sofreria variação. Esse procedimento é semelhante ao adotado por Kepler (1570) quando investigava valores extremos em problemas de volume máximo. O que Kepler testou para o volume do tonel, em que ele veio a afirmar que variações infinitesimais em torno do ótimo não alteram o volume, serviu de base para o primeiro algoritmo reconhecido para determinação de valor extremo desenvolvido por Fermat.

Tabela de comparação, para ilustrar mais as dimensões e gastos de materiais:

Raio	*Altura da lata*	*Material utilizado caixa 3 x 4 x2*	*2 x 6 x 2*	*1 x 1 x 12*	*Área da lata*
0,1	9799,363057	54877,39312	62716,88	94073,9254	6154,0628
1	97,99363057	5583,643312	6367,592	9411,38854	621,68
1,5	43,5527247	3874,428875	4397,062	6280,59236	424,3966667
2	24,49840764	3127,821656	3519,796	4719,69427	332,82
2,5	15,67898089	2795,057325	3108,637	3787,95541	285,41
3	10,88818117	2693,214437	2954,531	3171,79618	261,6533333
3,5	***7,999480047***	***2743,898089***	***2967,884***	***2736,8253***	***252,7585714***
3,95	***6,280636473***	***2887,116788***	***3085,585***	***2444,02735***	***253,7811684***
4	6,124601911	2907,910828	3103,898	2415,84713	254,33
8	1,531150478	6829,955414	6927,949	1431,92357	478,845
10	0,979936306	10148,76433	10227,16	1340,73885	689,54

Figura 4

c) O levantamento do problema evoluiu para questões não só do volume da lata como também para analisar o armazenamento dos objetos. Esse aspecto do problema levou à necessidade de buscar soluções teóricas que ajustassem os dados reais a valores ótimos, como se pode ver na Figura 4 quando o grupo enuncia os motivos da escolha. Nas Figuras 5 e 6, a associação entre funções, algoritmos e expressões algébricas, avalizou a relação entre dados reais e dados teóricos para os quais as condições de volume e armazenamento estejam pré-fixadas.

Obtendo h:

$h = 307{,}7/\Pi.R^2$

vamos agora encontrar a fórmula de material utilizado que é dada por:

$M_{\text{Material lata}}$: Área lateral + 2*(Área da base)=
① $2.\Pi.R.h + 2.\Pi.R^2 =$
$2\Pi R.(307{,}7/\Pi R^2) + 2\Pi R^2 =$
$(615{,}4/R) + 2\Pi R^2 =$

R > 0 já que não pode existir R negativo nesta função:

Derivando a última equação:

$4\Pi R - 615{,}4/R^2$

então:

$\Pi R^3 = 153{,}9$
$R = (153{,}9/\Pi)1/3 = 12{,}4/\Pi = 3{,}95\text{cm}$

O raio achado acima é o raio mínimo possível para se obter o mínimo de custo com material, na caso o metal.

Encontrando-se o R, procura-se agora o h:

$h = 307{,}7/\Pi.R^2 =$
$307{,}7/\Pi.(3{,}95)^2 =$
$307{,}7/48{,}95 =$
$6{,}29\text{cm}$

Substituindo o raio encontrado na equação geral do material gasto na embalagem (equação ①), encontra-se:

$M_{\text{Material lata}} = 2\Pi R^2 + 615{,}4/R$
$M_{\text{Material lata}} = 2\Pi 15{,}6 + 615{,}4/3{,}95 =$
$M_{\text{Material lata}} = 98 + 155{,}7 =$
$M_{\text{Material lata}} = 253{,}7\ \text{cm}^2$

Figura 5

d) Na figura 6, a relação entre valores teóricos e valores lógicos:

Raio	Área
0,1	6154,063 raio mínimo possível
1	621,68
1,5	424,3967
2	332,82
2,5	285,41
3	261,6533
3,5	**252,7586 lata do supermercado**
3,95	**253,7812 cálculo do raio ideal para se ter o menor gasto**
4	254,33
8	478,845
10	689,54 raio máximo em função da altura

Segue em anexo o gráfico desta função(entre as páginas 4 e5).

Percebendo bem a tabela ela possui R(raio) mínimo de 0,5cm já que é o comprimento médio de uma ervilha(1cm), e lógicamente não podemos ter um raio menor que seu comprimento.

O R(raio) máximo é de 10cm já que este R esta em função de h(altura) mínimo que também é de 1cm, que é a altura média de uma ervilha.

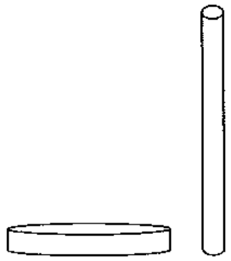


Figura 6

e) A observação das variações entre raio e altura na construção formou uma nova conexão entre representações matemáticas distintas. O grupo decidiu pesquisar a relação entre a área da superfície da lata com o seu raio ainda nas condições fixadas pelo objeto. Essa conexão foi realizada pela associação da tabela de dados da Figura 6 ao gráfico da área em função do raio. A representação gráfica da área a partir da tabela pode ser vista na Figura 7.

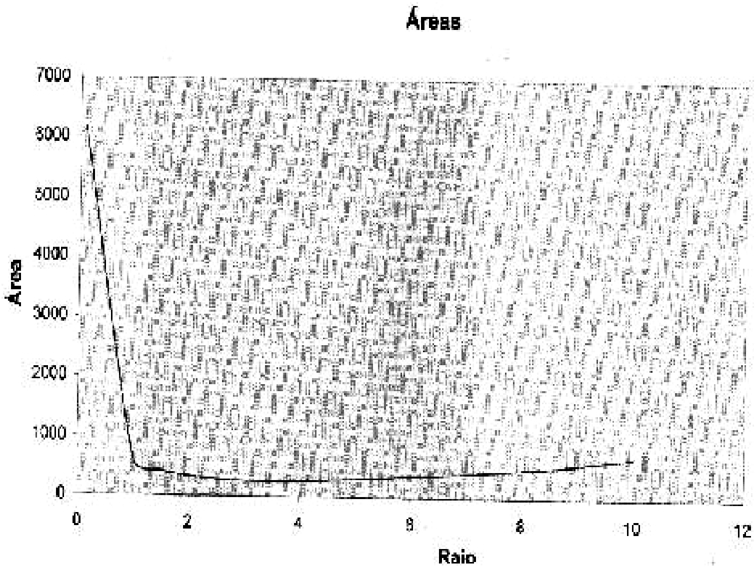


Figura 7

Pela observação do gráfico também ficou claro para o grupo que a função área será máxima para um raio tendendo a zero, o que é inviável face aos dados reais.

5. CONCLUSÕES

Como proposta pedagógica que tenha por objetivo explorar os campos de representação, sugere-se a elaboração de projeto desenvolvido pelos alunos a partir da análise de dados experimentais. É interessante que o projeto seja aberto o suficiente para que o aluno não só realize as conexões entre os campos de modo natural, mas também que eles percebam a necessidade de explorar todas as possíveis abordagens.

Para discutir uma proposta pedagógica que enriquecesse as conexões entre as diversas representações presentes nos mapas conceituais de máximos e mínimos, buscou-se nos livros didáticos qual o enfoque a ser dado. O que nos chamou a atenção foi a inclusão de projetos a serem desenvolvidos no término das unidades e um forte apelo ao uso de tecnologia. Uma das virtudes na aplicação de projetos é a variedade de desafios que podem ser colocados, sejam de natureza aplicada, abstrata ou até mesmo histórica. Alguns bons projetos podem ser encontrados nos textos de Ângela R. Santos & Waldecir Bianchini (2002), Débora Hughes Hallett(1998), Edwards (1979) ou Ed Dubinsky (1997).

Acompanhando a evolução do projeto, através de exposições orais e tendo oportunidade de observar a comunicação entre os membros do grupo, é possível também que outras vertentes importantes da educação matemática sejam analisadas: a linguagem e argumentação e as classes colaborativas. A linguagem e a argumentação dizem respeito ao campo da análise do discurso e às formas de comunicação dos alunos. As classes colaborativas dizem respeito aos estudos de comportamento de atividades realizadas em equipe.

Muitas das discussões sobre reforma do cálculo referem-se ao conteúdo. Na verdade, a discussão sobre a utilização de projetos revela a questão de como o cálculo é dado. O que fica claro também é que as inovações não estão restritas ao projeto sob a forma de situação-problema, mas também em projetos que viabilizem análises por meio da aplicação de tecnologia própria, como sensores ou calculadoras ou computadores.

Quanto à seleção do projeto deve-se ter em vista o atendimento a aspectos cognitivos:

- Qual o conhecimento necessário para a compreensão do projeto?
- Quais as representações necessárias?
- Quais as conexões que devem ser realizadas?

Para alcançar os objetivos da sedimentação do conceito de máximos e mínimos, os projetos devem ser trabalhados tendo em vista o conjunto do sistema de representações de Kaput (1991). A seqüência didática que está sendo sugerida deve vir de encontro às principais influências na construção do conceito de máximos e mínimos.

1) *Discutir a relevância e a prática*

A formação dos grupos, a organização dos debates, a distribuição das tarefas são pontos que devem ser observados pelo professor. Faz parte dos processos de resolução de problema o registro do desenvolvimento das etapas da solução do projeto. Estes registros devem ser discutidos e expostos pelo grupo.

2) *A experimentação e representação gráfica*
   Estimular o grupo a testar dados experimentais e buscar algum mecanismo de visualização gráfica do problema.
3) *Notação Funcional*
   Definir a função ou as equações que formam o modelo. Determinar quais as restrições do problema.
4) *Solução por Métodos Dedutivos e verificação dos resultados*
   O aluno deverá descrever a solução teórica, determinando todos os passos e avaliar se o resultado se ajusta à prática.

Buscando na história as justificativas para as seqüências e representações hoje adotadas, vimos que a escolha de um problema motivador teria papel fundamental no envolvimento do aluno com os objetivos do projeto. Este envolvimento seria tão maior quanto o reconhecimento do problema na sua realidade. Problemas de maximização estão presentes ao longo da história da matemática e diversas são as formas com que foram tratados. Sejam as representações geométricas da antiguidade, as tabelas experimentais do período medieval, os algoritmos e métodos dedutivos a partir do período renascentista, todas as representações são visões distintas que compõem o conceito conforme o entendimento de Kaput (1991). Entendemos também que a pesquisa histórica permite encontrar problemas e situações representativas da evolução de conceitos.

Pensamos que com este trabalho contribuímos para que o Ensino de Cálculo no curso superior seja conduzido por formas mais consistentes no sentido de exploração de outras representações ligadas ao conceito, que não sejam apenas as dos métodos dedutivos. Ou seja, alternativas de metodologia devem ter em mente o objetivo de definir as circunstâncias que são favoráveis à participação do aluno na construção do seu conhecimento como acontece na metodologia de projetos.

REFERÊNCIAS

BARON, M.E **– The Origins of the infinitesimal calculus** – London– Pergamon Press –1908

DUBINSKY, ED - **A Theory and Practice of Learning College Mathematics** - Mathematical Thinking and Problem Solving , Purdue University IEA – 1997

EDWARDS, C.H. JR. – **The Historical Development of the Calculus** - Springer-Verlag - 1979

GRABINER,J. – The changing concept of change: The derivative from Fermat to Weierstrass **Mathematics Magazine**, vol. 56, pg. 195-203. – 1983.

HUGHES-HALLETT,DEBORAH E AL – **Cálculo** - Livro Técnico Científico - 1998

KAPUT, JAMES - **Democratizing Access to Calculus: new routes to old roots** – University of Massachusetts – USA. Mathematical Thinking and Problem Solving IEA/1997

KAPUT, JAMES – **Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra** – Research Issues in the Learning and teaching of Algebra *IEA*/1991

NOVAK, JOSEPH – **Learning Creating and Using Knowledge** –Lawrence Erlbaum Associates Publishers, London - 1998

PIAGET&GARCIA -– **Psychogenesis and the History of Science** – Columbia – 1989
SANTOS, ANGELA ROCHA&WALDECIR BIANCHINI – **Aprendendo cálculo com Maple – funções de uma variável.** LTC – 2002.
STRUIK, D.J. – **Fermat . Maxima and Minima** –A source book in Mathematics 1200-1800 – *Princeton Paperbacks* – 1950
TIKHOMIROV, V.M. – **Stories about Máxima and Mínima** –Mathematical World, vol. 1 – American Mathematical Society – Mathematical Association of America 1990