

ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE BARRAS ATRAVÉS DO MODELA-MENTO DE SÓLIDOS EM CAD

Kléos M Lenz César JR – kleos@ufv.br Rita de Cássia S. S. Alvarenga – ritadecassia@ufv.br Departamento de Engenharia Civil Universidade Federal de Viçosa Campus Universitário 36571-000 – Viçosa - MG

Resumo: Os alunos dos cursos de engenharia, de uma forma geral, apresentam dificuldades na compreensão dos fenômenos físicos referentes ao comportamento de estruturas, a partir de equações matemáticas com relativa complexidade. Uma solução factível para permitir uma maior visualização de tais fenômenos seria a implantação de laboratórios de práticas experimentais destinados às disciplinas básicas. No entanto, de uma maneira geral, estes não estão presentes nos cursos de engenharia brasileiros, tendo em vista os custos de implantação e manutenção. Uma forma alternativa, eficiente e ainda pouco explorada de visualização dos fenômenos físicos estruturais pode ser obtida através da modelagem tridimensional em CAD. Este recurso permitirá ao aluno desenvolver seu raciocínio acompanhando virtualmente o comportamento da estrutura, minorando os custos de implantação e operacionais quando comparados aos laboratórios experimentais. Neste trabalho pretende-se mostrar as potencialidades da modelagem digital e os recursos existentes na plataforma gráfica que facilitarão a implementação de uma ferramenta destinada à análise de estruturas de barras, com o fim de permitir ao estudante, de forma didática, a visualização do comportamento estrutural. Esta ferramenta terá um papel complementar ao desenvolvimento teórico do comportamento estrutural, somente tendo sentido na següência deste estudo. O binômio teoriamodelagem digital, portanto, será trabalhado em conjunto.

Palavras-chave: Modelamento de sólidos, CAD, Resistência dos Materiais, Teoria das Estruturas.



1. INTRODUÇÃO

Hoje, os mais avançados softwares de CAD dispõem de recursos para a modelagem digital de sólidos. Trata-se da composição de um modelo no espaço virtual de uma plataforma gráfica, através da qual procura-se transferir para o computador o protótipo de um modelo físico, de acordo com suas dimensões e formas exatas.

Os softwares de CAD são cada vez mais populares nos escritórios de engenharia, porém, geralmente utilizados para fins de representação do modelo em papel, não para fins de concepção de projeto. O conhecimento dos recursos disponíveis de modelamento de sólidos pode aumentar ainda mais produtividade e precisão dos trabalhos do engenheiro. Assim, no próprio software em que representa o modelo, poderá o profissional concebê-lo e analisá-lo.

A modelagem digital de sólidos permite ao usuário calcular algumas de suas propriedades geométricas e físicas, dependendo do aplicativo em uso, com relativa facilidade. Não importando a complexidade do sólido em análise, a obtenção automática de tais propriedades facilita tremendamente a tarefa árdua do engenheiro em analisar estruturas de barras de seções transversais quaisquer.

Neste trabalho é apresentado uma rotina que permite avaliação das propriedades geométricas a partir da discretização de um sólido qualquer com vistas a mostrar a viabilidade da implementação de aplicativo para análise de estruturas de barras na plataforma gráfica.

2. METODOLOGIA

Foi implementada uma rotina cujo objetivo é a discretização de um sólido em quantos elementos equidistantes forem necessários, para a obtenção de uma lista de propriedades geométricas (no caso específico, os momentos de inércia) seção a seção.

De posse dos resultados obtidos através da rotina implementada, a metodologia a aplicar para alcançar os objetivos pretendidos consiste na implementação de um programa complementar que resgate a lista das propriedades geométricas das seções transversais, dentre outras, e efetue a análise de estruturas de barras, conforme os métodos clássicos conhecidos, em ambiente CAD.

Uma análise mais criteriosa do elemento sólido gerado em CAD pode ser realizada em softwares específicos de CAE, através do qual, por métodos sofisticados, como o Método dos Elementos Finitos, o sólido poderá ser analisado mais precisamente, obtendo-se, por exemplo, o espectro de tensões em todo o corpo.

3. ASPECTOS DA MODELAGEM DIGITAL DE SÓLIDOS

3.1 Princípios de Modelagem Digital de Sólidos

Basicamente a modelagem digital de sólidos é a associação de algumas primitivas sólidas préestabelecidas, seguidas de operações que venham a lapidar, unir e/ou separar as partes comuns de dois outros sólidos (Figura 1).



Figura 1 - Operações booleanas realizadas em primitivas sólidas.



Outras formas para a composição de sólidos existem, como a transformação de um polígono fechado em sólido, através da extrusão do perfil (Figura 2), e a geração de um sólido de revolução, a partir do qual um perfil é revolvido em torno de um eixo (Figura 3).



Figura 2 - Método de geração de um sólido, através da extrusão de um perfil.



Figura 3 - Método de geração de um sólido através da revolução de um perfil em torno de um eixo.

A exata geração do sólido é parte essencial na correta análise de suas propriedades físicas e geométricas. O sólido é uma entidade única e satisfaz as condições espaciais necessárias para que o software de CAD calcule as seguintes propriedades:

Volume; Centróide; Momentos de inércia nos eixos triortogonais (X,Y,Z) sobre os quais foi gerado; Produtos de inércia nos eixos supracitados;



Raios de giração;

Principais momentos de inércia e direção de seus eixos, a partir do centróide.

Sabe-se que a determinação das propriedades listadas acima, em sólidos de geometria complexa, nem sempre é tarefa óbvia e imediata. A dificuldade em obter tais propriedades tem levado os profissionais da análise a simplificações grosseiras e nem sempre adequadas, que podem não corresponder a verdadeira condição geométrica do sólido.

Observa-se uma aplicação bastante interessante em engenharia estrutural, na análise de vigas de seções variáveis.

3. CÁLCULO DE DESLOCAMENTOS EM ESTRUTURAS DE BARRAS

3.1. Aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV)

A palavra virtual significa "susceptível de exercer-se, embora não esteja em exercício". Por "deslocamento virtual" entende-se um deslocamento hipotético, infinitesimal, de um ponto ou sistema de pontos materiais. O deslocamento é suposto infinitesimal de modo a não alterar a configuração estática e geométrica do sistema e das forças que nele agem, não violando as condições de equilíbrio a que tais forças obedecem. Além disso o deslocamento virtual é causado por uma ação externa qualquer, cuja origem não é objeto de discussão. Cumpre acentuar, que a ação externa causadora do deslocamento virtual é completamente independente das forças externas que mantém a estrutura em equilíbrio.

Seja um ponto material *m* em equilíbrio, isto é, submetido a um conjunto de forças P_i tais que a sua resultante \bar{R} é nula (Figura 4). Imagine que seja dado a este ponto um desloca-

mento $\overline{\delta}$ sem a introdução de nenhuma nova força ao sistema, isto é, mantendo $\overline{R} = 0$. Este deslocamento não pode ser atribuído a nenhuma causa física real, pois, para haver deslocamento real do ponto, seria necessária a introdução de uma nova força ao sistema, que possibilitasse este deslocamento (real) do ponto *m*. Este deslocamento é denominado "deslocamento virtual".

O trabalho virtual W realizado pelo conjunto de forças P_i (reais) que atuam sobre o ponto *m* quando ele sofre o deslocamento virtual $\vec{\delta}$ vale $W = \vec{R} \cdot \vec{\delta} = 0$. Dizemos então, que, "para um ponto material em equilíbrio ($\vec{R} = 0$), o trabalho virtual realizado pelo sistema de forças reais em equilíbrio que atua sobre o ponto, quando este sofre um deslocamento virtual arbitrário qualquer, é nulo", o que constitui o princípio de *d'Alembert*.



um ponto material

Isto garante a aceitação do novo conceito (trabalho virtual), pois preserva, para o ponto que sofreu um deslocamento virtual, as suas duas condições de equilíbrio: a estática (traduzida pela resultante nula) e a energética (traduzida pelo trabalho virtual realizado nulo). A partir destas considerações, pode-se extrapolar os teoremas da Mecânica sobre trabalhos reais para teoremas sobre trabalhos virtuais:

"Para um corpo rígido em equilíbrio, a soma algébrica dos trabalhos virtuais de todas as forças (reais) que sobre ele atuam é nula, para todos os deslocamentos virtuais arbitrários (compatíveis com os vínculos do corpo) que lhe são impostos".

"Para um corpo elástico, que atingiu sua configuração de equilíbrio, o trabalho virtual total das forças externas que sobre ele atuam é igual ao trabalho virtual das forças in-



ternas (esforços simples) nele atuantes, para todos os deslocamentos virtuais arbitrários (compatíveis com os vínculos do corpo) que lhe são impostos".

3.2 Cálculo de Deslocamentos Devidos à Atuação de Carregamento Externo

Seja a estrutura plana da figura. 5a, submetida a um carregamento genérico. Em se tratando de um corpo elástico, ela se deformará em função da atuação destas ações, adquirindo a configuração esquematizada em pontilhado na mesma figura:



Seja o elemento diferencial *ds*, que sob ação do carregamento atuante e, conseqüentemente, sob ação dos esforços internos simples M,N,Q,sofre as seguintes deformações:



Figura 6. Elemento diferencial: a) equilíbrio; b) deformada.

Através da Resistência dos Materiais obtém-se:

 $d\phi = \frac{M}{E J} ds \qquad du = \frac{N}{E S} ds \qquad dv = \frac{c Q}{G S} ds$

Onde:

- *E* módulo de elasticidade longitudinal do material,
- *G* módulo de elasticidade transversal,
- J momento de inércia da seção transversal em relação ao seu eixo neutro,
- *S* área da seção transversal,
- *c* coeficiente de redução, resultante da distribuição não uniforme das tensões cisalhantes, cujo valor varia com o tipo de seção (vale aproximadamente 1,2 para seção retangular e 2,1 para perfil I).



Seja determinar o deslocamento do ponto *m* na direção Δ , denominado δ .

Seja agora a Figura 5b, onde a configuração da estrutura, após a aplicação da carga $(\overline{P}=1 \text{ uf })$, é a indicada em traço cheio e que coincide com o eixo da estrutura da Figura 5a quando descarregada. Dando-se a todos os pontos da estrutura com o carregamento indicado na Figura 5b deslocamentos virtuais exatamente iguais aos provocados pelo carregamento indicado na Figura 5a, esta assumirá a configuração deformada (virtual) indicada em pontilhado (idêntica à configuração deformada real indicada na Figura 5a).

Aplicando, então, à estrutura com as cargas e esforços indicados na Figura 5b e sob os deslocamentos virtuais impostos, o princípio de trabalhos virtuais (PTV.) para corpos elásticos, que diz ser o trabalho virtual das forças externas é igual ao trabalho virtual das forças internas, para quaisquer deslocamentos virtuais compatíveis com os vínculos da estrutura, tem-se:

- Trabalho virtual das forças externas (cargas e reações): $W_{ext} = \overline{P}\delta$ (as reações não realizam trabalho, pois $\delta = 0$)
- Trabalho virtual das forças internas:

Será igual à soma dos trabalhos virtuais de deformação de todos os elementos de comprimento *ds* ao longo da estrutura e, como está-se trabalhando no regime linear e vale o princípio da superposição de efeitos, será a soma dos trabalhos virtuais de deformação devidos a cada um dos esforços simples atuantes na estrutura.

$$W_{int} = \int_{estr.} \overline{M} \, d\phi + \int_{estr.} \overline{N} \, du + \int_{estr.} \overline{Q} \, dv$$

Igualando o W_{ext} ao W_{int}, levando em conta as expressões da Resistência dos Materiais e sendo ($\overline{P} = 1$ uf), tem-se que :

$$\overline{P}\delta = \int_{\text{estr.}} \frac{\overline{M}M}{EJ} ds + \int_{\text{estr.}} \frac{\overline{N}N}{ES} ds + \int_{\text{estr.}} c \cdot \frac{\overline{Q}Q}{GA} ds$$
(1)

Em estruturas usuais de vigas e pórticos, a deformação por flexão apresenta valores consideravelmente superiores às parcelas deformação por cisalhamento e por esforço normal. Desta forma, é justificável trabalhar apenas com a primeira parcela da integral acima. Nos casos em que houver elementos estruturais de pequenos comprimentos ou alturas elevadas, deve-se levar em conta a deformação por cisalhamento.

O cálculo de deslocamento é necessário para a obtenção da matriz de Flexibilidade e do vetor independente, quando se quer analisar estruturas pelo processo da Flexibilidade .Quando se utiliza o processo da Rigidez, esses conceitos estão implícitos, tendo em vista que o Método das Forças é essencial ao à existência do Método da Rigidez.

3.3 – Obtenção dos Coeficientes da Matriz de Flexibilidade

Os coeficientes da matriz de flexibilidade podem ser obtidos aplicando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), conforme descrito anteriormente.

Resumidamente, aplicando-se o Método da Carga Unitária, igualando o trabalho das forças externas com o trabalho das forças internas, por se tratar de um campo conservativo, e levando-se em conta apenas a parcela de deformação por flexão, tem-se, conforme Figura 7 e expressão [2]:





Figura 7 – Aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) a uma estrutura plana qualquer

$$\delta_{ij} = \int_{estr.} \frac{M_i \times M_j}{E \times J} \times ds$$
⁽²⁾

em que:

M_i , Q_i e N_i	Momentos fletores, esforços cortantes e esforços normais ao longo do
	eixo da estrutura devidos à aplicação do hiperestático X _i .
M_j , Q_j e N_j	Momentos fletores, esforços cortantes e esforços normais ao longo do
	eixo da estrutura devidos à aplicação do hiperestático X _i .
δ_{ij}	é obtido da combinação dos diagramas de esforços solicitantes devidos
	à aplicação dos hiperestáticos X_i e X_j no Sistema Principal.

Para barras prismáticas, ou seja, barras em que a seção transversal é constante ao longo de seu comprimento, o cálculo da integral se resume à integração do produto de duas funções M_i . M_j .

No entanto, quase sempre a solução analítica destas funções não é simples. Teria que determinar analiticamente cada função, multiplicar analiticamente as expressões de M_i e M_j , determinar analiticamente a integral indefinida do produto destas funções e calcular numericamente a integral definida conhecendo os valores numéricos dos limites de integração.

Felizmente, há uma técnica muito mais prática, menos cansativa e menos sujeita a enganos que é a obtenção do valor numérico da integral através do uso de tabelas. No entanto, caso as barras possuam inércia variável, a obtenção da integral anterior torna-se bastante trabalhosa. Nestas situações, a utilização de ferramentas de CAD para obtenção dessa integral é uma opção plausível e bastante interessante de ser utilizada.

4. APLICAÇÃO DA MODELAGEM DE SÓLIDOS À ANÁLISE DE VIGAS

A Figura 8 ilustra uma estrutura hiperestática modelada no AutoCAD na forma de um sólido. Há três vistas. Uma em perspectiva, mostrando que a maior dimensão da peça é paralela ao eixo Z, e as demais vistas: um corte vertical da seção transversal e uma vista frontal.





Figura 8 - Vistas de uma viga de seção transversal variável.



Figura 9 - Modelo utilizado para fins de cálculo de Momentos de Inércia seção a seção

Na obtenção dos esforços internos em estruturas de barras é necessário o conhecimento das ações externas aplicadas, que envolvem ações permanentes (peso próprio, peso de equipamentos, materiais de enchimento, etc.) e ações acidentais (sobrecarga de utilização, etc). Se as seções transversais apresentarem variações consideráveis ao longo do comprimento da barra, o cálculo do peso próprio torna-se bastante trabalhoso. Além disso, caso a estrutura



seja ainda hiperestática, é necessário o conhecimento de suas propriedades elásticas e geométricas para sua resolução.

No que se refere às propriedades geométricas, caso haja variações nas seções da barra, os respectivos momentos de inércia variarão ao longo do comprimento. Este fato introduzirá dificuldades no cálculo das matrizes de flexibilidade e de rigidez, ne-

📰 AutoCAD Text Window - Cone.dwg	_ 🗆 ×
Edit	
Command: massprop	
Select objects: 1 found	
Select objects:	
SOLIDS	
Mass: 87679821.6797 Volume: 87679821.6797 Bounding box: X: -225.4324 565.1646 Y: -260.3465 385.1116	
Z: 340.7865 744.2028 Centroid: X: 149.2099 Y: 22.9283	
Z: 501.0577 Moments of inertia: X: 2.4626E+13 Y: 2.7877E+13 7.67400E+12	
Products of inertia: XY: -1.2187E+11 YZ: 6.3934E+11 7Y: 6.3592H12	
Radii of gyration: X: 529.9600 Y: 553.8613 7. 377.400	
Principal moments and X-Y-Z directions about centroid: I: 2.4302E+12 along [0.9534 -0.2912 0.07 J: 3.9058E+12 along [0.2999 0.8848 -0.35 K: 4.8918E+12 along [0.0338 0.3638 0.930 Write analysis to a file? [Ves/No] (N): n	92] 67] 8]
	-
Command:	

Figura 10 - Propriedades de massa de um volume sólido qualquer: a) Sólido qualquer modelado em AutoCAD; b) Relatório das propriedades geométricas obtidas através de MASSPROP.



cessárias à análise numérica da estrutura de barras pelo Processo dos Esforços e da Rigidez, respectivamente.

Para barras com geometrias descritas por equações matemáticas simples, o trabalho pode ser bastante simplificado. Porém, se a geometria da estrutura não puder ser descrita dessa forma, a obtenção da matriz de flexibilidade ou rigidez é tarefa bastante trabalhosa. Há, no entanto, a possibilidade da solução deste problema sem a necessidade da utilização de expressões matemáticas de alta complexidade, através da modelagem de sólidos em CAD.

Quando se quer calcular uma estrutura pelo Método Clássico (Processo da Flexibilidade), de uma forma geral, devem-se calcular os deslocamentos dos seus nós no sistema principal adotado. Isso pode ser feito através do Método da Carga Unitária, recaindo-se na solução de uma integral ao longo do comprimento da barra. Essa integral, por sua vez, é função, dentre outras variáveis, da inércia das seções transversais da barra, equação 1.

Sendo a integral uma solução aplicada a infinitas seções transversais, distantes umas das outras de medidas infinitamente pequenas, pode-se determinar seu valor ao longo do eixo da estrutura, através da divisão em N partes, seccionando a barra em grande número de seções transversais distintas.

Dessa forma, a integral apresentada na equação 2 será aplicada aos N elementos componentes da estrutura e toma a forma representada na equação 3:

$$\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{N} \frac{M_i \times M_{i+1}}{E \times J_i} \times \frac{\ell}{N}$$
(3)



sendo:

- M_i Momento fletor na extremidade esquerda do elemento i, cujo eixo coincide com o eixo Z do sistema de coordenadas XYZ;
- M_{i+1} Momento fletor na extremidade direita do elemento i, cujo eixo coincide com o eixo Z do sistema de coordenadas XYZ;
- J_i Momento de inércia da seção transversal em relação ao seu eixo neutro;
- 1 Comprimento total da barra

Quanto maior o número N de partes, menor será a distância entre essas fatias, o que aumenta a precisão desse processo em relação ao valor matemático exato da solução da integral proposta. O número N de partes será determinado, nesse caso, de acordo com a precisão pretendida no problema em questão.

A modelagem 3D AutoCAD permite ao usuário obter propriedades geométricas de sólidos quais-



Figura 11

quer. Assim, de posse de um sólido e a partir do comando MASSPROP, podem-se obter várias propriedades pertinentes àquele sólido.

Imagine um sólido qualquer cuja geometria pode ser definida conforme a Figura 10a. Ao uso do comando MASSPROP, obtêm-se as propriedades geométricas desse sólido. O resultado pode ser verificado na tela de texto apresentada logo a seguir ao uso do comando (Figura 10b).

Para a obtenção de seções transversais extraídas desse sólido, utiliza-se o comando SECTION. O plano então obtido, será transformado numa *region*, que consiste num sólido sem espessura. A estrutura apresentada na Figura 9 foi discretizada e o resultado obtido pode ser verificado na Figura 11. As figuras planas hachuradas em vermelho são *regions*, resulta-dos da aplicação de SECTION em 3 planos de corte específicos sobre o sólido estrutural. Essas *regions* também possuem propriedades geométricas como baricentro, momento de inércia, etc.

Seja o algoritmo capaz de seccionar um sólido em N partes e, seção a seção, obter uma lista de momentos principais de inércia, a partir do baricentro de cada uma. O código LISP correspondente está apresentado na listagem a seguir:

```
(vl-load-com)
(defun ename->VLA (en);---
(if (= (type en) 'ENAME)
   (if
        (vlax-ename->vla-object en)
       en
  );if
);
                                                            -- ename->VLA
(defun BoundingBox (en / p1 p2);
   (setq en (ename->VLA en))
(if (= (vla-get-ObjectName
                                     en) "AcDb3dSolid")
     (progn
               p1 (vlax-make-safearray vlax-vbDouble '(0 . 2))
p2 (vlax-make-safearray vlax-vbDouble '(0 . 2))
        (setq p1
       );setq
```



Figura 12 – Relação dos Momentos de inércia por fatia da barra.



A principal função utilizada é **GetMomInLst** (*Get Moment of Inertia in List*), que recebe dois valores como parâmetros: o nome de identificação do sólido que se pretende discretizar e o número de divisões desejado. Assim, a função irá seccionar o sólido em N partes obtendo o momento principal de inércia de cada seção, armazenando seu valor no vetor *lx*.

Utilizando a função acima implementada, e aplicando-a a um sólido qualquer, discretizando-o em 50 partes, o resultado esperado pode ser visto na Figura 12. Cada traço vermelho representa uma seção transversal e, na janela de texto, observa-se a lista de momentos de inércia, seção a seção. Nela podem ser verificados os resultados em cada seção.

5. CONCLUSÃO

Este trabalho permite avaliar a perfeita viabilidade da utilização de ferramentas de CAD para a representação e avaliação de problemas relativos aos fenômenos físicos do comportamento de estruturas, de acordo com as mais modernas tendências tecnológicas.

Ao utilizar a rotina supra-listada, tem-se uma relação dos momentos de inércia de cada uma das fatias determinadas pelo usuário, que corresponde ao vetor J_i da equação 3. Assim, pode-se obter o deslocamento δ_{ij} de um ponto qualquer, tendo em vista que são conhecidos os momentos fletores nas extremidades de cada fatia.

A partir daí, podem-se obter facilmente as demais propriedades geométricas das seções transversais necessárias ao cálculo dos esforços e ao dimensionamento de estruturas de barras, cuja implementação é o que se pretende realizar, a fim de utilizar este recurso gráfico em complementação às atividades de um laboratório experimental de estruturas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MOREIRA, M.S.S., ALVARENGA, R.C.S.S., Análise Computacional de Vigas Contínuas pelo Método da Flexibilidade. Viçosa: Ed. UFV, 1997.

STAMATO, M.C., Deslocamentos em Estruturas Lineares. São Carlos: Ed. EESC-USP, 1984.

SÜSSEKIND, J.C., Curso de Análise Estrutural. v2, Rio de Janeiro: Ed. Globo, 1984.

CESAR JR, K. M. L. Visual LISP: um guia básico de programação para o AutoCAD. São Paulo: MarketPress, 2001.

AUTODESK INC. Visual LISP 2000 Developer's Guide. San Raphael/CA, 1999.

AUTODESK INC. Visual LISP 2000 Reference. San Raphael/CA, 1999.

CÉSAR JR, K.M.L; RODRIGUES, F.L. Avaliação da Resistência dos Materiais Através da Modelagem 3D em CAD. In: ICECE, 9, 2000, São Paulo. Anais. São Paulo: USP, 2000. p. 16-24.

BALDAN, R. Desvendando Totalmente o AutoCAD 2000. São Paulo: MarketPress, 2001.

CÉSAR JR, K.M.L. Obtendo Propriedades Geométricas de Seções Fechadas. **CADesign**. São Paulo: MarketPress, v. 24, n. 2, p. 15-21, 2001.