METODOLOGIA DE ENSINO UTILIZANDO O MÉTODOS DOS MOMENTOS NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA ELETROSTÁTICA

Aldo Artur Belardi – belardi@fei.edu.br
Orlando Del Bianco Filho – orlandof@fei.edu.br
Centro Universitário da FEI, Departamento de Eletricidade
Av. Humberto de Alencar Castelo Branco 3972 - Bairro Assunção
CEP 09850-901- São Bernardo do Campo – SP - Brasil

Resumo: *Este artigo apresenta uma nova metodologia de ensino na solução de problemas na eletrostática, envolvendo um método numérico denominado método dos momentos que contribui para despertar novos interesses no estudante de graduação, no aprendizado da eletrostática bem como do eletromagnetismo, pois envolve aspectos matemáticos interessantes, além de permitir a interação com outras disciplinas, dada a necessidade de elaboração de programas específicos, utilizando-se linguagens estruturadas.*
O método dos momentos é baseado no princípio dos pesos ponderados que engloba muitos métodos específicos conhecidos, tais como: o método da simulação de carga, e o método dos elementos finitos que passa a ser considerado como um dos casos especiais do método dos momentos.
Como exemplo de aplicação, é apresentada a evolução dos cálculos para determinar a densidade superficial de carga em um fio reto finito com diâmetro desprezível, submetido a um potencial constante. A validação dos resultados é feita utilizando-se o aplicativo Matlab, através de gráficos coloridos que apresentam o perfil da distribuição, bem como os valores da densidade superficial de carga.
A disponibilidade de visualização dos vários gráficos obtidos é um forte atrativo para o aluno que participa da discussão, assimilando as bases teóricas do estudo.

Palavras-chave*: Eletrostática, Momentos*

1. INTRODUÇÃO

O Método dos Momentos, HARRINGTON (1968), é um método generalizado baseado no princípio dos resíduos ponderados, que engloba muitos métodos específicos conhecidos tais como: o método da simulação de carga, o método da simulação de superfície de carga e mesmo o método dos elementos finitos que é considerado como um dos casos especiais do método dos momentos. O nome momento é entendido como o produto de uma função com outra previamente escolhida resultando em um produto interno, o qual fornecerá uma solução aproximada.

Qualquer método pelo qual os coeficientes de uma equação podem ser determinados através de um sistema matricial, pode ser interpretado como uma variação do método dos momentos. Devemos considerar alguns aspectos para a escolha desta função , tais como :

- A exatidão da solução desejada,
- A facilidade da avaliação dos elementos da matriz,

- O tamanho da matriz ,
- A solução rápida da matriz resultante.

Os passos para a aplicação do método dos momentos são :

- Assumir uma função aproximada para substituir a função desconhecida com o operador adequado,
- Selecionar uma função apropriada e uma função de ponderação desenvolvendo o produto interno para obtermos a matriz resultante,
- Resolver a equação matricial através de um programa computacional a fim de obtermos a solução aproximada.

2. DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO E APLICAÇÕES

A base do princípio do método dos momentos é aproximar uma função do tipo :

$$f(x) = \sum_{n} \alpha_n \boldsymbol{L} g_n \tag{1}$$

na qual α_n são constantes não conhecidas, g_n é uma função base ou uma função de expansão e $\boldsymbol{L}$ um operador matemático.

Fazendo-se o produto interno com uma função de ponderação W_m obtemos :

$$\sum_{n} \alpha_n < \boldsymbol{L} g_n, W_m > = < f, W_m > \quad \text{para} \quad m = 1,2.....N \tag{2}$$

Quando adotamos a função de ponderação igual a função base, o resultado obtido na aplicação do método dos momentos é chamado de método de Garlerkin. Este método chama-se método de Dirac e utiliza como função de ponderação a função pulso ou Delta de Dirac definida por :

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \quad \text{com} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \tag{3}$$

Uma forma de simplificar o cálculo dos coeficientes da matriz A é discretizando o domínio, forçando que a solução seja satisfeita somente para os pontos considerados.

O valor da matriz obtida, juntamente com o vetor formado pelo potencial, permitirão obter para cada um dos casos em estudo, um vetor composto por coeficientes, permitindo a determinação da densidade superficial de carga em cada ponto.

2.1 Aplicação em um fio reto linear finito

Inicialmente, CONSTANTINE (1989), realizamos um estudo da distribuição de cargas elétricas em um fio reto finito, com diâmetro muito pequeno submetido a um potencial constante, conforme Figura 1.

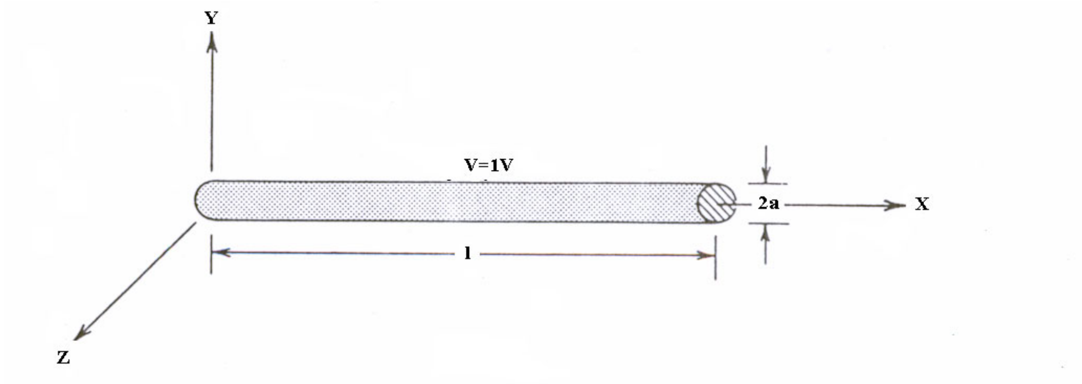

Figura 1 - Fio reto linear finito com diâmetro desprezível

sendo que a determinação do potencial poderá ser expressa por:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho(r)}{\sqrt{(x-x')^2 + a^2}} dl' \tag{4}$$

Podemos observar que a solução do problema não é imediata pois para o cálculo do potencial e de outras grandezas físicas tais como capacitância, campo elétrico, etc., devemos calcular a densidade superficial (ρ), que se encontra dentro de um operador matemático (integral). Portanto, devemos recorrer a aplicação de um método numérico para a solução do problema.

Como o fio é reto e finito, com o diâmetro muito pequeno e posicionado no eixo x, a observação em relação aos eixos y e z serão consideradas iguais a zero. Inicialmente para a aplicação do método dos momentos vamos dividir o fio em segmentos iguais e vamos considerar que em cada segmento a carga está concentrada no centro de gravidade de cada sub divisão conforme Figura 2.

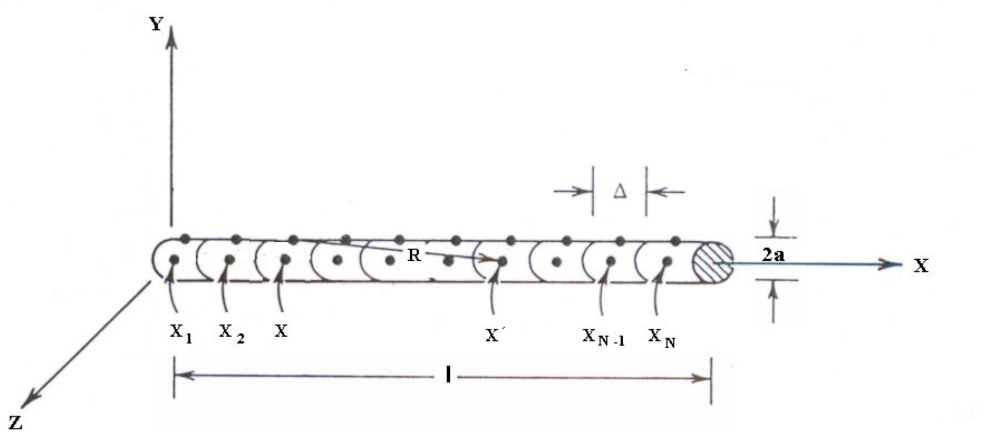

Figura 2 – Cargas consideradas no centro de gravidade de cada divisão sendo a distância R determinada pela diferença entre a coordenada fonte (x) em relação a coordenada observada (x’) para cada uma das sub divisões.

Aplicando-se o método dos momentos, conhecendo-se a função da solução aproximada f(x), a função de expansão g(x) e a função de ponderação W(x), o potencial poderá ser determinado pelo produto interno destas funções.

A determinação da densidade superficial pode ser aproximada através da expansão em N termos, compostos pela somatória dos coeficientes multiplicados pela função de expansão e pela função de ponderação em cada ponto, conforme segue:

$$V(r)_{Ponto} = \left\langle W_m, f, \boldsymbol{L}g \right\rangle = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \int_0^L \frac{1}{\sqrt{(x_m - x')^2 + a^2}} dx' \tag{5}$$

A equação (5) pode ser representada de forma mais otimizada utilizando a notação matricial, ou seja $[V_m]=[\alpha]*[Z_{mn}]$, sendo cada Z_{mn} definido por :

$$Z_{mn} = \int_0^L \frac{1}{\sqrt{(x_m - x')^2 + a^2}} dx' \tag{6}$$

3. RESULTADOS OBTIDOS

Para verificarmos o comportamento da densidade superficial de carga elaboramos um programa utilizando o aplicativo MatLab que permite avaliar a distribuição de carga em um fio reto e finito, através do método dos momentos utilizando como função de expansão o pulso. Tem como variáveis de entrada o comprimento, permitindo selecionar a quantidade de divisões, o diâmetro e o potencial em que o fio será submetido.

Determina a posição da carga, concentrada no centro de gravidade de cada uma das divisões e sua distância em relação à origem, permitindo verificar os valores da matriz resultante bem como do cálculo dos seus coeficientes que contribuem na determinação da densidade superficial de carga.

Como valores de saída permite visualizar todos resultados numéricos intermediários obtidos, mostrando também o gráfico do raio do fio em função do número de divisões bem como a distribuição da densidade superficial de carga, ambos em relação ao seu comprimento.

A seguir, Tabela 1 e Tabela 2, mostramos os resultados obtidos da densidade superficial de carga para um fio reto linear finito com diâmetro de 0,0001m e comprimento de 1m, submetido a um potencial de 1.0V, com 8 e 16 divisões.

Tabela 1 – Densidade superficial de carga (ρ) para um fio dividido em 8 segmentos iguais

Carga no ponto	Distância (m)	Densidade superficial no ponto x 1,0e-011 (pC/m)
1	0,0625	0,9211
2	0,1875	0,8309
3	0,3125	0,8066
4	0,4375	0,7975
5	0,5625	0,7975
6	0,6875	0,8066
7	0,8125	0,8309
8	0,9375	0,9211

Tabela 2 – Densidade superficial de carga (ρ) para um fio dividido em 16 segmentos iguais

Carga no ponto	Distância (m)	Densidade superficial no ponto x 1.0e-011 (pC/m)
1	0,03125	0,9957
2	0,09375	0,8764
3	0,15625	0,8411
4	0,21875	0,8219
5	0,28125	0,7963
6	0,34375	0,7984
7	0,40625	0,8028
8	0,46875	0,8102
9	0,53125	0,7963
10	0,59375	0,7984
11	0,65625	0,8028
12	0,71875	0,8102
13	0,78125	0,9957
14	0,84375	0,8764
15	0,90625	0,8411
16	0,96875	0,8219

As Figuras 3 e 4 permitem visualizar a comportamento da distribuição de carga em função do comprimento do fio, quando ele for dividido em 8 e 16 segmentos iguais respectivamente.

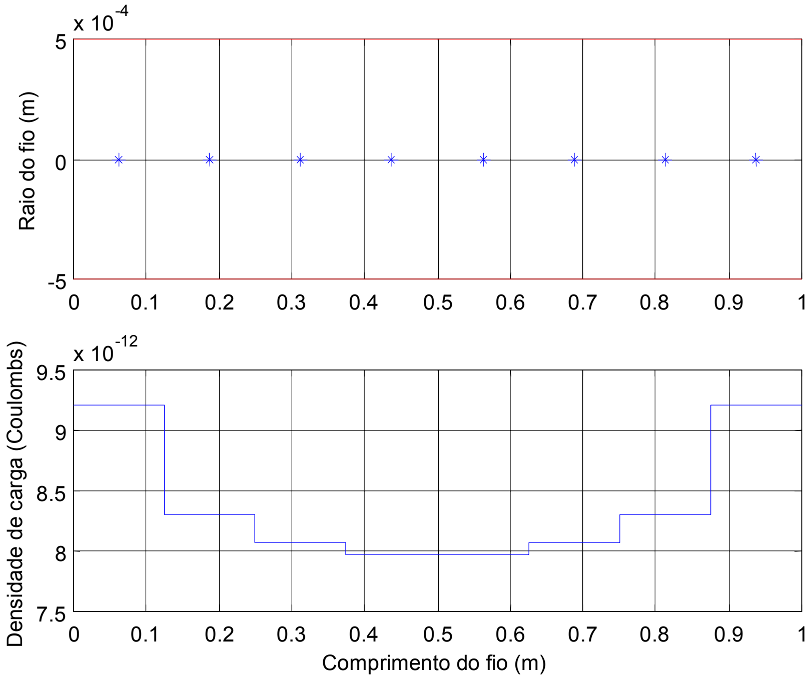

Figura 3 - Distribuição de carga de um fio reto dividido em 8 segmentos iguais

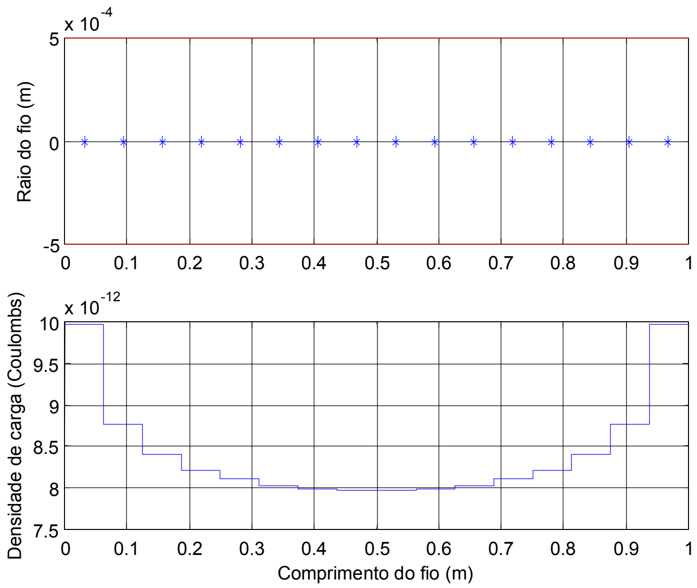

Figura 4 - Distribuição de carga de um fio reto dividido em 16 segmentos iguais

4. CONCLUSÃO

Verificamos portanto que através da metodologia apresentada alem de facilitar o ensino na solução de problemas tanto na eletrostática quanto no eletromagnetismo, também desperta novos interesses no estudante de graduação, pois o método empregado aplica conceitos matemáticos importantes, permitindo a interação com outras disciplinas, através do desenvolvimento de programas específicos, utilizando linguagens estruturadas tais como Delphi, C++ , Matlab, etc.

O exemplo de aplicação para a determinação da densidade superficial de carga, mostra os cálculos envolvidos bem como os gráficos que apresentam o perfil da distribuição, em um fio reto finito submetido a um potencial constante.

Acreditamos portanto que esta metodologia seja um forte atrativo para que os alunos participem das discussões, permitindo que assimilem com maior grau de facilidade as bases teóricas do estudo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Harrington R. F. **Field Computation by Moment Methods**. New York: Macmillan Company, 1968.

Constantine A. B. **Advanced Engineering Eletromagnetics**. New York: John Wiley & Sons, 1989.

TEACHING METHODOLOGY USING "METHOD OF MOMENTS" IN THE SOLUCTION OF ELECTROSTATIC PROBLEMS

Abstract: *This article presents a new learning methodology used in the solutions of electrostatic problems. It involves a numerical method called "Method of Moments" which helps to awake new interests to the graduation students, in learning of electrostatic even the electromagnetism. This happens because the method involves interesting mathematics aspects, besides to allow the integration with others subjects, given the necessity of specific programs elaboration, using the structural language. The "Method of the Moments" is based on the weight pound principle which includes many known specifics methods, such as : the method of charge simulation, and the method of the finites elements which turns to be considered as one of the especial cases from the method, itself. As an example of application, it is presented the whole evolution of a calculation used to determinate the superficial charge density in a straight and finite thread with a very worthless diameter, submitted in a constant potential. The validation of the results is done using the Matlab program, through the colored graphics that presents the profile of distribution , such as the values of the charge superficial density. The availability of visualization from the various graphics obtained is a strong attractive to the student that's participate of the discussion, assimilating the theoretical basis of studying.*

Key-Word: *Electrostatic, Moments*