



ESTRATÉGIA DE ENSINO PARA INICIALIZAÇÃO NA MODELAGEM DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Henrique J. S. Coutinho – coutinho@sj.univali.br

Cursos de Engenharia de Computação e Engenharia Industrial-Mecânica
UNITEC – Grupo de Pesquisa em Tecnologia e Sistemas

Vinícius Medina Kern – kern@sj.univali.br

Cursos de Ciência da Computação e Engenharia de Computação, UNITEC
UNITEC – Grupo de Pesquisa em Tecnologia e Sistemas

Humberto de Campos Wichrowski – hcw@terra.com.br

Curso de Engenharia Industrial-Mecânica

UNIVALI, CE São José

Rodovia SC 407, Km 4, Vargem do Imaruim

88122-000 – São José-SC

***Resumo:** O interesse na Pesquisa Operacional por parte dos acadêmicos dos cursos de graduação em Engenharia, entre outros cursos, depende muito da curiosidade ou interesse do próprio aluno em função do retorno que a disciplina pode oferecer em relação à sua vida profissional. É dever do professor despertar o interesse do aluno. Este trabalho tem como objetivo apresentar o resultado da utilização de uma dinâmica de grupo em um problema de programação linear, enfatizando as dificuldades que podem ser encontradas no processo de modelagem de problemas de programação linear até a validação do modelo, partindo da caracterização do problema, levantamento dos dados na forma correta, o modelo matemático propriamente dito, até os resultados e a consistência do modelo. A metodologia adotada é uma dinâmica de grupo para a modelagem de um problema utilizando o projeto de um flutuador como objeto de estudo. Este, por sua vez, utiliza alguns conceitos da Física. O resultado da prática apresenta a vantagem de se obter um contato direto com as variáveis de decisão, e a efetiva análise e validação do modelo pode ser atingida na prática.*

***Palavras-chave:** Programação linear, Modelagem, Estratégia de ensino, Aprendizagem, Educação em engenharia.*

1. INTRODUÇÃO

Segundo Mizukami (1986), existe um paradigma tradicional de aprendizagem no qual a educação é um processo de permanente transmissão de idéias. O aluno deve ser ensinado, o professor deve ensinar. Há uma ênfase na sala de aula como meio para a aprendizagem. Não se considera que o aluno pode aprender de outras formas e em outros lugares.

Ainda segundo a autora, esta forma tradicional de conceber a aprendizagem subordina educação a um processo de instrução. O papel do professor, no entanto, pode ser o de



“realizar situações cognoscitivas” (COELHO, 1997), incentivando a investigação independente pelos alunos, permitindo que descubram soluções não limitadas a estereótipos.

Esta capacidade de descobrir soluções não-estereotipadas é particularmente importante na Engenharia. O profissional engenheiro resolve problemas que requerem tanto do conhecimento técnico desenvolvido em seu curso de graduação quanto da sua experiência, criatividade e “bom senso” (aqui significando a capacidade de analisar problemas e sintetizar soluções segundo critérios e medidas usualmente aceitos).

É comum na primeira aula da disciplina de Pesquisa Operacional (PO) os alunos perguntarem: “Mas o que é pesquisa operacional?” A área denominada como Pesquisa Operacional envolve um vasto campo de aplicação e diversas metodologias com significativa especificidade. O problema de programação linear (PPL), por exemplo, tem uma interpretação geométrica bastante acessível, porém a formulação e resolução de um PPL através do método Simplex é menos óbvia.

A vasta aplicabilidade da Programação Linear torna sua plena compreensão e aplicação uma necessidade importante para o engenheiro. Em função do caráter pouco óbvio da modelagem e formulação de um PPL, abre-se um campo pedagógico importante a explorar: como ensinar estudantes de Engenharia a disciplina ou a arte de resolver problemas concretos formuláveis como PPL?

Este artigo divulga resultados de uma experiência pedagógica na qual o dimensionamento de volumes de um artefato é apresentado como situação-problema formulável como PPL. O problema envolve conceitos simples de física e é apresentado para alunos de 5º e 8º semestres dos cursos de Engenharia Industrial e Engenharia de Computação da Universidade do Vale do Itajaí (UNIVALI). Os alunos devem formular o PPL, identificando variáveis e função objetivo a otimizar, e resolver o problema, apresentando um protótipo do artefato.

A próxima seção discute a característica do problema de formulação de PPL. Em seguida, apresenta-se uma abordagem pedagógica à formulação de PPL através da proposição de um problema, sua formulação e resolução por alunos, e a utilização dos resultados na construção de um protótipo que permite validar os resultados.

2. SOBRE A FORMULAÇÃO DE UM PPL

Lanzer (1988) afirma que “a capacidade de se verter problemas descritivos em um modelo matemático formal é função da experiência prática acumulada no assunto”. Desta forma, tentativas, sucessos e insucessos devem formar um generoso quadro de referências suficientemente amplo para que se possa resolver novas situações com imaginação e segurança.

Em outra instância, apesar de toda dedicação que um aluno possa ter em seus estudos com a formulação de todos os problemas aplicados propostos nos livros acadêmicos, haverá sempre uma diferença entre aquele problema aplicado e o problema aplicado “concreto” que exigirá desde a coleta e preparação dos dados, a possibilidade de se manusear a própria variável de decisão e até verificar a qualidade da solução obtida através do modelo formulado.



A facilidade de perceber as relações entre recursos, alternativas, restrições e objetivo, no primeiro contato com um PPL, não é inerente a todos alunos. O ponto inicial para a resolução de um PPL, para alocar recursos de forma eficiente com o fim de otimizar um objetivo, é perceber as relações anteriores e formular um modelo.

Outros autores também postulam que a experiência é fundamental para a formulação de modelos. Especificamente, os seguintes autores abordam a modelagem de PPL:

- Andrade (1998) diz que os passos desde a definição do problema até a avaliação da solução devem ser verificados.
- Caixeta-Filho (2001) ressalta que a modelagem depende do nível de abstração e experiência do modelador.
- Goldbarg e Luna (2000) observam que a modelagem depende de uma capacidade para manipular expressões matemáticas e da experiência associada a características pouco desenvolvidas na academia, tais como intuição e criatividade.
- Loesch e Hein (1999) sugerem alguns passos para a modelagem: dividir o problema em problemas menores, identificar variáveis de decisão quantificáveis, objetivo, fatores restritivos, determinar eventuais relações entre variáveis, entre outros passos. Apesar da explicitação dos passos, também sugere que muito se aprende da arte de modelar através do estudo da construção de modelos clássicos.
- Lachtermacher (2002) aborda a modelagem em problemas de gerência com dois aspectos principais: levantar as informações relevantes ao modelo de decisão e adotar a intuição dentro do processo de tomada de decisão. Também menciona sobre a separação de tipos de decisão que podem também auxiliar no processo de modelagem. Ainda outros aspectos são mencionados de importância na modelagem.

Não existem, portanto, algoritmos completos para a modelagem de problemas de pesquisa operacional. A próxima seção apresenta uma abordagem pedagógica que requer dos estudantes a compreensão, formulação e resolução de um PPL, bem como a construção e teste de um protótipo que deve atender a necessidade enunciada.

3. ABORDAGEM PEDAGÓGICA À MODELAGEM E FORMULAÇÃO DE PPL

Nesta abordagem, a solução de um problema de projeto concreto, com enunciado semelhante ao de uma situação profissional, é solicitada a estudantes de engenharia. A formulação do PPL, solução e teste do artefato é proposta a grupos de 3 alunos. São usados materiais simples, facilmente encontráveis no ambiente acadêmico (isopor, barras de silicone, pregos, tesoura, balança de precisão, e um recipiente com água). Os alunos interagem para detalhar os dados do problema, formular o PPL e resolvê-lo, e construir o protótipo, que é testado pelo professor (o primeiro autor deste artigo).

3.1 O problema do flutuador-sinalizador

Aos alunos o problema é apresentado como um enredo, criando um cenário fictício para a atividade a ser desenvolvida, como segue:

Os cursos de Oceanografia e Telecomunicações da universidade estão desenvolvendo flutuadores que emitem sinais para embarcações para serem utilizados em áreas de alto



tráfego náutico. O sinalizador tem três componentes básicos: uma caixa epóxi estanque, uma placa com componentes eletrônicos, e material flutuante de alta resistência à intempérie no ambiente marinho. Caixa epóxi, placa e material flutuante são representados, respectivamente, por barras de silicone, pregos e poliestireno celular rígido (isopor) de baixa densidade, com custos e limites de quantidade determinados.

Uma balança de precisão (com 4 dígitos decimais) e provetas graduadas são colocadas à disposição dos alunos para determinação de massas e volumes, visando a resolver o seguinte problema:

“Construir o flutuador respeitando os limites de quantidade e minimizando o custo total do artefato.”

Dados os requisitos funcional (construir o flutuador respeitando os limites) e não-funcional (minimizar o custo), as tarefas a cumprir são:

1. Formular e documentar o modelo matemático para a minimização do custo do flutuador.
2. Construir um protótipo e entregar o modelo utilizando somente isopor, pregos e barras de silicone, fixando as partes com fita adesiva ou outro material, desde que o peso seja desprezível em relação ao peso do artefato.
3. Apresentar o trabalho (modelo matemático e protótipo) em dez minutos.

3.2 Formulando o PPL

A partir desse momento, o aluno deve perceber que existe o desafio de construir o flutuador na condição de que a densidade relativa do protótipo seja próxima a um, $\rho_m \leq 1$. Esta condição deve ser alcançada através do modelo matemático de minimização, e não através de tentativas e erros. A modelagem e formulação do problema, conforme foi elaborada por um aluno (o terceiro autor deste artigo), foi a seguinte:

Custos unitários de material

- Preço do Silicone: 100 g = R\$ 15,00; 1 g = R\$ 0,15
- Preço do Polipropileno: 100 g = R\$ 25 / 1 g = R\$ 0,25
- Preço da placa eletrônica (pregos): 100 g = R\$ 55 / 1 g = R\$ 0,55

Nota: Os preços são hipotéticos.

Restrições quantitativas

- Massa da placa eletrônica (pregos): deve ser maior que 25 g e menor que 30 g.
- Massa da caixa epóxica (silicone): deve ser maior que 28 g e menor que 30 g.

Um sumário destes dados iniciais é apresentado na tabela 1.

Tabela 1 – Limites de quantidade e custo de materiais para construção do artefato flutuador

| Isopor (material flutuante) | Pregos (placa eletrônica) | Barras de silicone (caixa epóxica) |
|-----------------------------|---------------------------|------------------------------------|
| Sem limite determinado | 25 a 30 g | 28 a 40 g |
| R\$ 0,25/g | R\$ 0,55/g | R\$ 0,15/g |



Condições de flutuação dos corpos

Sobre um corpo submerso atuam duas forças: seu peso, que é vertical e para baixo, e o empuxo, que também é vertical, mas para cima. O valor do empuxo é igual ao peso do volume de líquido deslocado por um corpo, quando este é mergulhado no líquido. Com respeito a isto, podem ocorrer três casos:

- Se o empuxo é menor do que o peso, o corpo afunda. Isto acontece quando *a densidade do corpo é maior do que a densidade do líquido*.
- Se o empuxo é igual ao peso, o corpo ficará em equilíbrio quando estiver totalmente submerso no líquido. Em relação à vertical, o corpo estará em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Isto acontece quando *a densidade do corpo é igual à densidade do líquido*.
- Se o empuxo for maior do que o peso, o corpo sobe até a superfície e aflora em parte. Isto acontece quando *a densidade do corpo é menor do que a densidade do líquido*.

Para solucionar este problema no limite, temos como referência o segundo caso, no qual a densidade do corpo deve ser igual à densidade do líquido. Para conseguir a flutuação, a soma das massas dos três materiais, dividido pela soma dos volumes dos três materiais deve ser inferior à densidade da água (1000 Kg/m^3 ou 1 g/cm^3), conforme a equação 1. Respeitando esta razão no limite (densidade próxima à da água), garantimos que a condição de flutuação vai ser a mínima necessária para que o flutuador não afunde e, dessa forma, reduzimos o custo de fabricação.

$$\frac{M_i + M_s + M_g}{V_i + V_s + V_g} < 1 \quad (1)$$

onde os MM representam massas, os VV representam volumes, e os índices i , s e g representam, respectivamente, isopor, silicone e pregos.

Criando o modelo matemático do flutuador

Como se deve minimizar o custo de fabricação do flutuador, a variável de decisão deve ser a quantidade de massa de cada material que vai ser utilizada na construção. Assim, a função objetivo (FO) será minimizar o custo total do material (Z), conforme expressa a equação 2.

$$\text{MIN } Z = 0,15 M_s + 0,25 M_i + 0,55 M_p \quad (2)$$

Obtenção dos dados faltantes para a formulação de restrições

Os dados necessários para criar as restrições do modelo são as densidades de cada material do flutuador. Estas foram obtidas a partir de medições em laboratório, utilizando balanças e provetas. Para determinar as densidades de cada material, pesa-se uma certa quantidade do material na balança e, a seguir, mergulha-se completamente o material em uma proveta graduada com certo volume de líquido. Mede-se o aumento do volume do líquido na proveta, que é o volume do material mergulhado. As seguintes medidas foram obtidas:

- Pregos:
 - Massa pesada = 7,8 g (10 pregos)
 - Volume inicial = 13,7 ml (cm³)
 - Volume final = 14,9 ml (cm³)
 - Volume = 1,2 ml (cm³).
 - Densidade $\rho_p = 7,8 \text{ g} / 1,2 \text{ cm}^3 = 6,5 \text{ g/cm}^3$
- Isopor:
 - Massa pesada = 0,13 g
 - Volume = 8,5 ml (cm³)
 - Densidade $\rho_i = 0,13 \text{ g} / 8,5 \text{ cm}^3 = 0,0153 \text{ g/cm}^3$
- Silicone:
 - Massa pesada = 4,92 g
 - Volume inicial = 11 ml (cm³)
 - Volume final = 16 ml (cm³)
 - Volume = 5 ml (cm³)
 - Densidade $\rho_s = 4,92 \text{ g} / 5 \text{ cm}^3 = 0,984 \text{ g / cm}^3$.

Restrições do problema

Para formular as restrições devem ser criadas variáveis que representem o volume de cada material, já que se vai decidir em relação à densidade, que é igual a Massa / Volume. As medidas e restrições resultantes estão representadas nas equações de números 3 a 8.

$$M_s / V_s = 0,984 \text{ g/cm}^3 \quad (3)$$

$$M_i / V_i = 0,0153 \text{ g/cm}^3 \quad (4)$$

$$M_p / V_p = 6,5 \text{ g/cm}^3 \quad (5)$$

$$(M_s + M_i + M_p) / (V_s + V_i + V_p) < 1 \quad (6)$$

$$25 \leq M_p \leq 30 \quad (7)$$

$$28 \leq M_s \leq 40 \quad (8)$$

As restrições 3, 4 e 5, servem somente para a apresentação do volume do material a ser utilizado. A equação 6, merece uma atenção maior, pois ela determinará a massa dos materiais. Para isso são necessárias algumas manipulações.

$$(M_s + M_i + M_p) / (V_s + V_i + V_p) < 1 \quad (6)$$

$$(M_s + M_i + M_p) < 1 (V_s + V_i + V_p) \quad (9)$$

Como a variável de decisão é expressa em gramas, devemos reescrever a equação anterior em função da massa. Isto é possível pois temos a densidade já calculada. Assim teremos a equação 10 onde os coeficientes calculados representam o inverso da densidade de cada um dos respectivos materiais.

$$M_s + M_i + M_p - 1,0162M_s - 0,0153M_i - 0,1538 M_p \leq 0 \quad (10)$$

Forma canônica do modelo



A forma canônica do PPL é:

$$\text{MIN } Z = 0,15 M_s + 0,25 M_i + 0,55 M_p$$

Sujeito às restrições:

$$M_s + M_i + M_p - 1,0162M_s - 0,0153M_i - 0,1538 M_p \leq 0$$

$$M_s - 0,98 V_s = 0$$

$$M_i - 0,015 V_i = 0$$

$$M_p - 6,5 V_p = 0$$

$$M_s \geq 28$$

$$M_s \leq 40$$

$$M_p \geq 25$$

$$M_p \leq 30$$

$$M_s, M_i, M_p, V_s, V_i, V_p \geq 0$$

3.3 Usando os resultados do PPL para concluir o projeto

A solução do problema de otimização pelo método Simplex resultou nos valores apresentados na tabela 2 para as variáveis MM , com os respectivos custos associados.

Tabela 2 – Quantidades e custos de material na solução ótima (valores aproximados)

| Material | Massa (g) | Volume (cm ³ ou ml) | Custo (R\$) |
|----------|-----------|--------------------------------|-------------|
| Pregos | 25 | 3,84 | 13,75 |
| Isopor | 0,32 | 21,46 | 0,244 |
| Silicone | 28 | 28,57 | 4,20 |

Preço estimado do material para fabricação do flutuador = **18,19 R\$**.

Preparação dos materiais para fabricar o flutuador

A partir dos resultados da otimização, para construir o flutuador pode-se calcular exatamente as quantidades de material conforme o resultado da otimização. As equações 9, 10 e 11 determinam os números de pregos, comprimento de barras de silicone e dimensões do bloco de isopor.

$$n_p = M_p / (V_p m_p) = 25 / (3,84 * 0,78) = 32 \text{ pregos} \quad (11)$$

$$c_s = V_s / (2\pi r) = 28,57 / (2 * 3,14 * 2,76) = 30,1 \text{ cm} \quad (12)$$

$$x = V_i / (y z) = 21,46 / (0,9 * 4,5) = 5,29 \text{ cm} \quad (13)$$

onde n_p é o número de pregos, m_p é a massa de um prego, c_s é comprimento da barra de silicone, r é o raio da base do cilindro (barra) de silicone igual a 2,76 cm, e as dimensões do bloco de isopor são x , y e z , com y e z fixos em 0,9 e 4,5 cm.

Considerações finais sobre o trabalho do flutuador

Além de modelar e formular um PPL, os alunos tiveram de considerar variantes corriqueiras no cotidiano profissional do engenheiro: erro de aproximação, perda no processamento (ao serrar barras de silicone, por exemplo) e a variação da densidade da água com a temperatura, que poderia provocar o afundamento do flutuador com o aumento da temperatura, já que foi usado o maior valor de densidade da água em função da temperatura (1 g/cm^3 a 4°C).

O professor adotou como critério de aprovação do protótipo a flutuação quando colocado na água e o afundamento quando sofre a adição do peso de um prego – pois se não houver o afundamento, significa que o custo (e o volume dos materiais) não foi minimizado. Os alunos fizeram, ainda, as seguintes observações:

- Na hora da montagem deve-se ter atenção à disposição dos materiais com respeito ao bloco de isopor, para garantir o equilíbrio do flutuador no momento de colocá-lo na água. As barras de silicone foram cortadas de forma que a maior parte da área destas ficasse abaixo do bloco de isopor. Com os pregos também se deve tentar manter o equilíbrio.
- No momento em que o flutuador foi posto no balde com água, foi possível comprovar que a condição de flutuação desejada foi alcançada. O flutuador permaneceu flutuando no mesmo nível da água e, somente com a adição da massa de um prego, foi suficiente para ele começar a afundar, e, ao retirar o prego, ele começou a emergir. Com isto comprova-se que condição da mínima flutuação foi respeitada totalmente.
- Também foi possível comprovar a lei do empuxo de Arquimedes. O flutuador começou a afundar porque o seu peso era maior do que o peso do volume de água deslocado por ele.
- O modelo matemático provou com exatidão a minimização da utilização de materiais.

A figura 1 ilustra os resultados do experimento: duas soluções produzidas por alunos – aqui em negativo e de cabeça para baixo para melhor visualização.

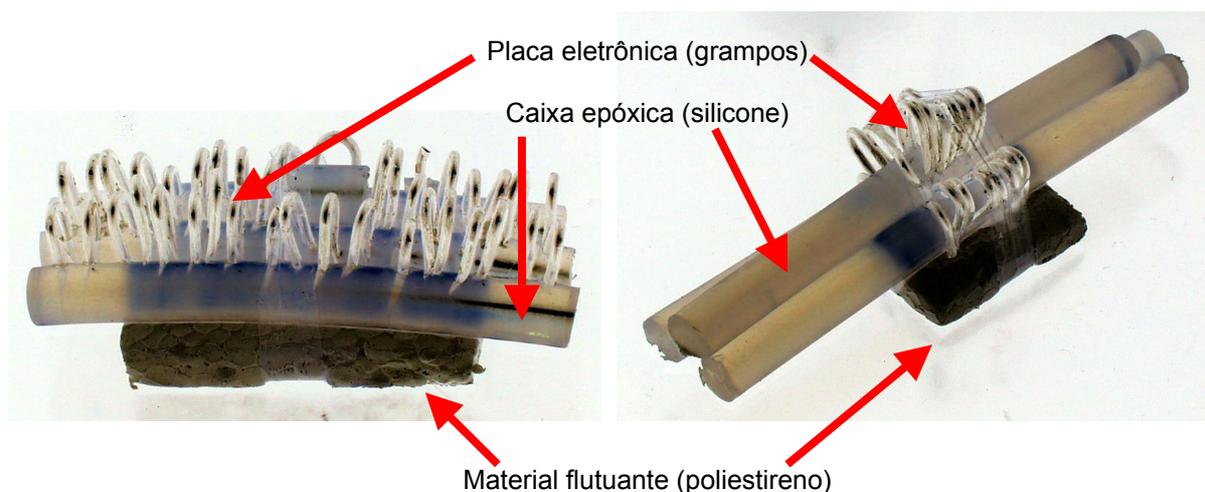


Figura 1 – Soluções dos alunos para o problema apresentado



4. CONCLUSÕES

Este artigo apresentou uma experiência pedagógica para estimular estudantes de engenharia a formular problemas concretos usando conceitos aprendidos em sala de aula, levando em conta que diversos autores consideram que o aprendizado da modelagem e formulação depende da compreensão, experiência e criatividade de cada indivíduo.

A sessão prática de laboratório para avaliação dos protótipos tem uma duração curta, de aproximadamente duas horas, e um custo extremamente baixo considerando-se os materiais utilizados (pregos, isopor e silicone) que podem ser substituídos por tantos outros, como por exemplo, chumbo de pesca, rolhas de cortiça e durepoxi. E escolha dos materiais deve permitir um fácil manuseio quanto ao seu corte e baixo custo, recomendando-se o uso de materiais recicláveis, facilitando a prática.

Sob o ponto de vista do uso de estratégias pedagógicas diferenciadas, a experiência vem atacar um dos problemas mais sérios do sistema educacional brasileiro: a abordagem da educação como um processo de repetição, sem análise e crítica, gerando incapacidade de relacionar teoria e prática. Feynman (2000), físico ganhador do prêmio Nobel que viveu no Brasil, relata uma experiência de vida extremamente positiva no Brasil em diversos aspectos, mas desanca o sistema educacional brasileiro como invencível destruidor de inteligências. Ao procurar identificar virtudes no sistema, verificou que absolutamente todos os raros casos de excelência acadêmica que conheceu eram de estudantes que não haviam sido pacientes do sistema brasileiro. O físico relata que um chefe de departamento de educação em ciências, presente à palestra na qual tal constatação foi mencionada, reconheceu que o relato era difícil de ouvir mas verdadeiro, caracterizando o sistema educacional brasileiro como um “câncer”.

O experimento leva o estudante a elaborar conhecimentos e manipular informações para chegar à formulação e solução do problema, já que pesos, volumes e custos não são todos dados explicitamente, mas exigem o uso de conceitos da física. Este fato incentiva o acadêmico a agregar conhecimentos diferentes a fim de modelar o problema.

Apesar do problema não apresentar um alto grau de dificuldade, dois itens do trabalho devem ser considerados quanto a um passo para o aprendizado no processo de modelagem: o primeiro, em relação ao contato determinado entre o modelador e suas variáveis de decisão. O segundo refere-se à construção e ao teste do modelo que permite que a fase de validação seja alcançada na realidade. Em ambos os casos, a prática permite situações raramente atingidas nos PPL apresentados no livros didáticos.

REFERÊNCIAS.

- ANDRADE, E. L. **Introdução a pesquisa operacional**. ed. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1998.
- COELHO, Maria Inês de Matos. **Pesquisa**: envolvendo os estudantes na construção do conhecimento. Educação em Foco ano 1, nº 1, p. 48-51. FAE-UEMG, CEPENMG. Julho de 1997.
- FEYNMAN, Richard P. O americano outra vez! **Parcerias Estratégicas** 9, p. 223-239, Outubro de 2000.



- GOLDBARG, M.C. e LUNA, H.P. **Otimização combinatória e programação linear**. Rio de Janeiro: Ed. Campus, 2000.
- LACHTERMACHER, G. **Pesquisa operacional na tomada de decisões**. Rio de Janeiro: Ed. Campus, 2002.
- LANZER, E.A. **Programação linear**: conceitos e aplicações. Rio de Janeiro: IPEA – PNPE, 1988.
- LOESCH, C. e HEIN, N. **Pesquisa operacional**: fundamentos e modelos. Blumenau: Ed. FURB, 1999.
- MIZUKAMI, M. G. M. **Ensino: as abordagens do processo**. São Paulo: E.P.U., 1986, 119 p.

A STRATEGY FOR STUDENT INITIATION ON LINEAR PROGRAMMING PROBLEM SOLVING

***Abstract:** Interest in operational research by the undergraduate students of engineering and others courses is sparked by curiosity or professional interest. It is a professor's duty to spur interest among students. This paper's aim is to describe the use of study groups in a problem solving situation. We use a hypothetical linear programming optimization problem. I will demonstrate that the students overcome the difficulties that could be found during the modeling process of a linear problem through the use of discussion and cooperation until the model is validated. The study groups will start with the problem of characterization, followed by data obtainment and data formalization, next with properly stating the mathematical model, continuing until the results are obtained and the model is validated. The adopted methodology will therefore be the use of study groups working in a floater problem as a target, with some physics concepts. Through the use of study groups as they solve this problem, the students have the advantage of having a close relationship with the decision variables until one effective analysis of the model can be obtained and validated.*

***Keywords:** Linear programming, Modeling, Teaching strategy, Learning, Engineering education.*