EXPLORANDO AS TRANSFORMAÇÕES LINEARES NO PLANO COM O USO DO MATLAB

Roselice Parmegiani – rpchies@ucs.br
Universidade de Caxias do Sul – Centro de Ciências Exatas, da Natureza e de Tecnologia
Alameda João Dal Sasso, 800
CEP: 95700 – Bento Gonçalves – RS

Resumo: *O presente artigo tem por objetivo descrever uma metodologia de trabalho utilizada na disciplina de Álgebra Linear, ministrada nos cursos de Engenharia, relacionada ao ensino das transformações lineares no plano com a utilização do MATLAB. Os acadêmicos têm a tarefa de elaborar uma rotina simples para criar uma figura no plano e aplicar a esta uma ou mais transformações lineares. O objetivo do trabalho é concretizar o ensino do referido conteúdo e oferecer aos estudantes uma oportunidade de conhecer o software e aprender a utilizá-lo.*

Palavras chaves: *Transformações lineares, Metodologia, Ensino – aprendizagem, Software MATLAB*

1 INTRODUÇÃO

Quando se pensa no ensino da matemática, em qualquer nível, tem-se a preocupação de torná-lo interessante aos olhos do aluno. Em muitas situações o professor se depara com perguntas do tipo “Para que serve?” ou “Onde vou usar tal conteúdo?” que mostram a curiosidade dos estudantes no que se refere à aplicação do que está sendo estudado. Dependendo do nível em que o estudante se encontre e do assunto, às vezes não é possível dar uma resposta tão concreta quanto se gostaria. Felizmente, em grande parte dos conteúdos matemáticos, pode-se utilizar aplicações para justificar o estudo de conceitos e manipulações e, dessa forma, despertar o interesse da turma de alunos.

De acordo com Lima (1999), três componentes fundamentais devem ser considerados no ensino da matemática, quais sejam, a conceituação, a manipulação e as aplicações. O autor destaca que a dosagem adequada desses componentes está relacionada a clareza de ideias, ao hábito de pensar e agir de forma ordenada e ao interesse e capacidade futura dos alunos em empregar as técnicas aprendidas. Os três componentes harmonizam um curso e todos são necessários ao êxito do trabalho do professor.

A conceituação, segundo Lima (1999) diz respeito à formulação correta e objetiva das definições, o estabelecimento de hipóteses, a conexão entre diversos conceitos, a interpretação e reformulação de ideias. A manipulação, por sua vez, está relacionada à destreza e habilidade em manusear equações, fórmulas e construções geométricas. Já, as aplicações são a principal razão para o estudo da matemática; a partir delas empregam-se as noções matemáticas e teorias estudadas na obtenção de resultados, conclusões e previsões.

Tendo vista os três componentes referidos anteriormente, é possível elaborar uma estratégia metodológica, na disciplina de Álgebra Linear, que contemple o estudo transformações lineares planas. Tal metodologia, proposta neste artigo, alia os aspectos teóricos ao software MATLAB que auxilia na visualização, entendimento, manipulação e aplicação dos conceitos.

O trabalho consiste na proposta de elaboração de uma rotina em MATLAB para criar uma figura e aplicar à mesma uma ou mais transformações lineares planas. A escolha do MATLAB deve-se à facilidade na utilização do mesmo, ao seu poderoso potencial e à quantidade significativa de licenças disponíveis nos laboratórios de informática da Universidade de Caxias do Sul.

2 O USO DO SOFTWARE MATLAB COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO

As tecnologias de informação estão cada vez mais presentes no dia-a-dia de professores e alunos e possibilitam a investigação e experimentação. Nesse sentido, o aluno assume um papel mais dinâmico da ação educativa, pois interage e organiza sua própria experiência de aprendizagem; o professor, por sua vez, participa como um facilitador permitindo que o estudante desenvolva habilidades e seja capaz de atribuir importantes significados no processo de ensino-aprendizagem (AGUIAR, 2011).

No que se refere à exploração e utilização de softwares na prática de sala de aula, o MATLAB tem um papel privilegiado, pois possui uma poderosa linguagem no que diz respeito à computação técnica e é bastante versátil em cálculos matemáticos, análises numéricas, simulações, desenvolvimento de algoritmos, construções gráficas, dentre outras funcionalidades (GILAT, 2006). O MATLAB - MATrix LABoratory – é um software cuja base operacional são as matrizes; é utilizado no mundo inteiro por estudantes, cientistas e engenheiros, em instituições de ensino ou em grandes empresas.

Até a muito pouco tempo atrás, os usuários do MATLAB eram pessoas com conhecimentos profundos em linguagem de programação, tais como o FORTRAN e C e a literatura existente destinava-se a esse público. Há alguns anos pode-se observar a adoção, cada vez mais freqüente deste software, principalmente pelas universidades. Isso se deve à evolução do programa no que diz respeito à facilidade de utilização, à grande variedade de recursos que oferece e, também, aos vários livros e tutoriais disponíveis direcionados para leigos em programação.

O MATLAB é um ambiente e, também, uma linguagem de programação. Chapman (2003) destaca que a grande biblioteca de funções predefinidas, a existência de muitos comandos para desenhos e imagens e a possibilidade do usuário construir uma interface gráfica são as grandes vantagens do software. Porém, segundo o autor, o programa tem duas desvantagens principais: pode ser mais lento que outras linguagens e tem custo de aquisição.

Na UCS, o MATLAB é disponibilizado em vários laboratórios de informática. Os acadêmicos também podem contar com a oferta de cursos de curta duração de MATLAB básico, pelo Núcleo de Apoio ao Ensino de Matemática da instituição. Em doze horas-aula os cursistas aprendem a utilizar comandos básicos do software, manipular vetores e matrizes, resolver sistemas lineares, construir gráficos, operar com polinômios e expressões simbólicas e criar rotinas e programas simples.

3 TRANSFORMAÇÕES LINEARES NO PLANO

Uma transformação linear no plano nada mais é do que uma função que pode ser interpretada a partir da equação matricial $Ax = b$. Nesta equação a matriz A age, por multiplicação, sobre o vetor x transformando-o no vetor b. Dessa forma, uma transformação linear $T : R^n \to R^m$ é uma lei que associa cada vetor x do R^n um vetor $T(x)$ do R^m, em que os conjuntos R^n e R^m são, respectivamente, o domínio e contradomínio de T (LAY, 1999).

Uma transformação T é linear se:

(i) $T(u+v) = T(u) + T(v)$, para vetores u e v do R^n (1)

(ii) $T(cu) = cT(u)$, para todo escalar c real. (2)

As transformações lineares no plano podem ser estudadas de forma bem prática, sob uma abordagem geométrica, em que o aluno visualiza e manipula as diferentes transformações, com o auxílio do software MATLAB. As idéias-chave, para tal propósito, são três: uma transformação T transforma segmentos de reta em segmentos de reta, importantes propriedades de T estão relacionadas com propriedades da matriz A e pode-se determinar T observando sua ação nas colunas da matriz identidade.

Seja, por exemplo, uma reflexão no eixo x e os vetores (1,0) e (0,1), colunas de I_2 (a matriz identidade 2x2). Observa-se, na “Figura 1”, que o vetor (1,0) permanece inalterado e o vetor (0,1) é transformado no vetor (0,-1).

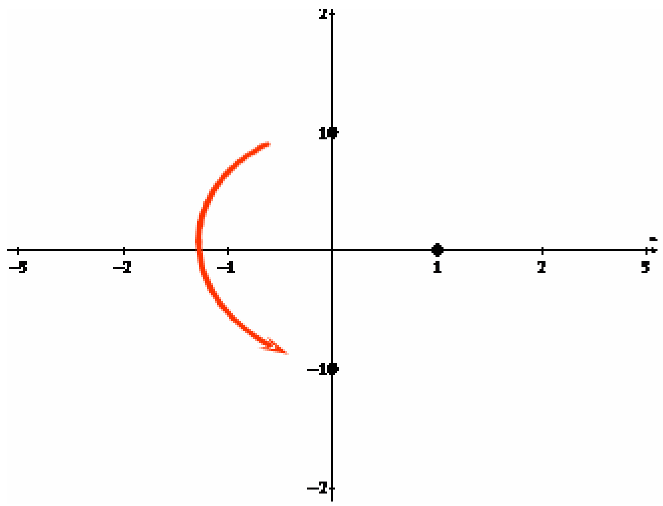

Figura 1 – Transformação de reflexão no eixo x

Assim sendo, a matriz canônica da transformação de reflexão no eixo x é dada pela “Equação 3”:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Da mesma forma, outras matrizes canônicas de transformações lineares no plano, tais como reflexão no eixo y, reflexão na origem, expansão ou contração horizontal, expansão ou contração vertical, cisalhamentos, etc., podem ser construídas também pela visualização, no plano, das transformações sofridas pelos vetores (1,0) e (0,1).

Seguindo esse raciocínio, o vetor *(x,y)* é transformado no vetor *(-x,y)* pela reflexão em relação ao eixo y; o mesmo vetor é levado para *(-x,-y)* se a transformação for uma reflexão em relação à origem ou para *(y,x)* se for considerada uma reflexão em relação à reta $y = x$. Essas transformações podem ser observadas na "Figura 2" e as respectivas matrizes canônicas são mostradas na "Equação 4" – reflexão no eixo y, "Equação 5" – reflexão na origem e "Equação 6" – reflexão na reta $y = x$.

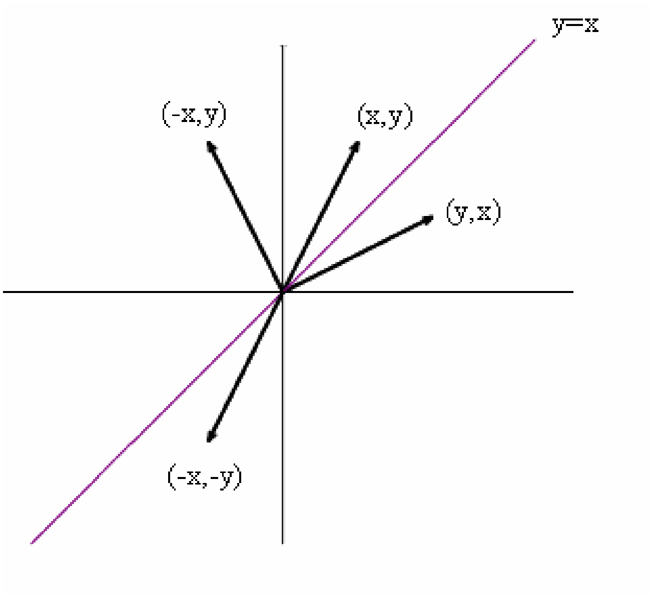

Figura 2 – Diferentes transformações do vetor *(x,y)*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

4 O PROJETO

Na disciplina de Álgebra Linear, ministrada aos cursos de Engenharia do Campus de Bento Gonçalves da UCS, é solicitado aos alunos um projeto de criação de uma rotina no

MATLAB envolvendo transformações lineares planas, quando do estudo deste assunto. As turmas da referida disciplina são, em média, constituídas por cinqüenta alunos. Dada essa realidade, apenas algumas aulas são ministradas em laboratório de informática, normalmente, duas ou três. Nestas aulas os alunos entram em contato com o software, aprendem a utilizar seus comandos básicos, as funções básicas, as funções gráficas e de resolução de sistemas lineares. Os estudantes também são orientados a escrever rotinas e programas simples.

A rotina solicitada na disciplina deve contemplar a criação de uma figura e a aplicação de uma ou mais transformações lineares à mesma, a partir da manipulação de vetores e matrizes. A temática que define a figura original é a mesma para todos os alunos de um semestre, sendo esta escolhida em consenso pelo grupo. Robôs, carros e objetos voadores foram algumas das temáticas já utilizadas.

Considerando a pouca experiência dos acadêmicos com o MATLAB, não é exigido dos mesmos a construção de uma rotina elaborada, que envolva o uso de sentenças condicionais e laços. Além dos comandos e operações básicas do MATLAB, outros comandos estudados para a realização da tarefa referem-se a: limitação dos eixos - “Equação 7”, congelamento da janela gráfica - “Equação 8”, desenho e pintura de uma polígono sendo dadas as coordenadas *(x,y)* dos vértices e a cor *c* - “Equação 9”, seleção da primeira linha de uma matriz A – “Equação 10” e a inserção de um texto no ponto *(a,b)* do plano – “Equação 11”.

axis([xmin xmax ymin ymax]) (7)

hold on (8)

fill(x,y,c) (9)

A(1,:) (10)

text(a,b,’string’) (11)

Com o intuito de oferecer maiores esclarecimentos a respeito da atividade como um todo, a classe constrói, em conjunto, uma rotina para criar a figura de uma casa e algumas transformações da mesma. O primeiro passo é o traçado da figura em um sistema de coordenadas para definir suas dimensões e seus pares ordenados. A “Equação 12” apresenta a rotina completa em que são dadas algumas explicações em forma de comentários e, portanto, acompanhadas do símbolo de porcentagem (%). Por fim, a “Figura 3” mostra a casa original e a casa transformada.

```
%projeto: transformação linear de uma casa
axis([-10 10 -10 10])
hold on
A=[1 1 5 5 1; 2 5 5 2 2];   % matriz cujas colunas são os vértices do retângulo
fill([A(1,:)], [A(2,:)],'r')
M=[1 0;0 -1];               % Matriz de reflexão no eixo x                          (12)
T1=M*A;
fill([T1(1,:)], [T1(2,:)],'r')
B=[1 3 5 1; 5 8 5 5];       %matriz cujas colunas são os vértices do triângulo
fill([B(1,:)], [B(2,:)],'b')
T2=M*B;
```

```
fill([T2(1,:)], [T2(2,:)],'b')
text(1,1,'casa original')
text(1,-9, 'casa transformada')
```

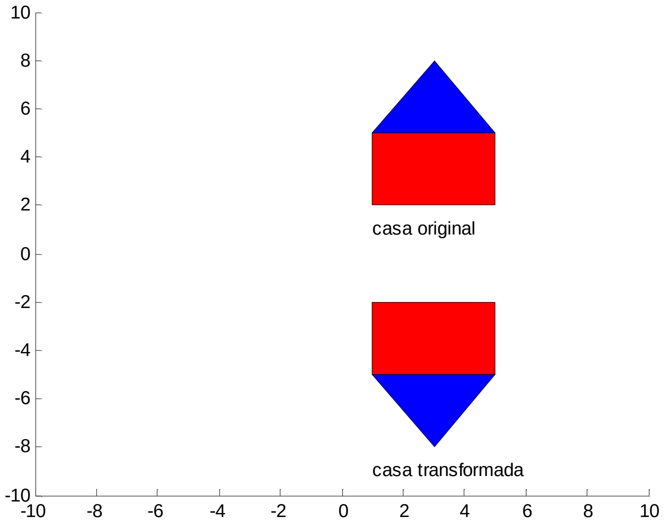

Figura 3 – Construção de uma figura e reflexão da mesma no eixo x

A "Figura 4"[1] e a "Figura 5"[2] mostram os trabalhos de dois acadêmicos nos projetos construção de um robô e construção de um carro, respectivamente. Pode-se observar que mais de uma transformação linear foi aplicada à figura original (construída no primeiro quadrante), em cada caso. A "Equação 13" descreve, na íntegra, o projeto da construção de um carro e suas transformações.

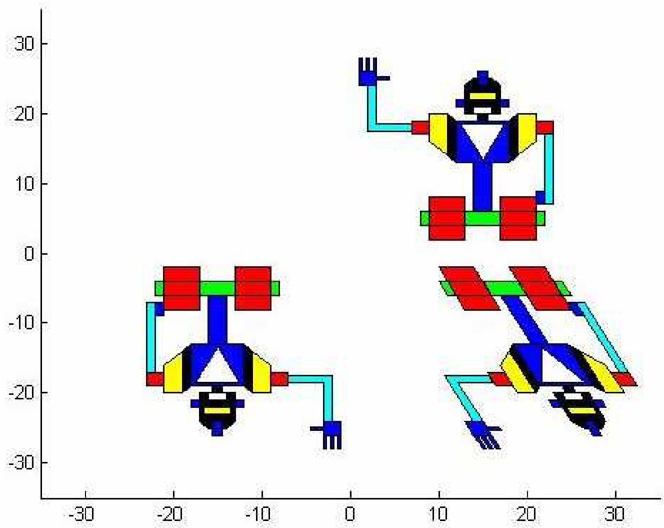

Figura 4 - Projeto: robôs

[1] Projeto de autoria da acadêmica Laura Bigolin, do Curso de Engenharia de Produção.
[2] Projeto de autoria do acadêmico Mário Henrique Bordignon, do Curso de Engenharia Elétrica.

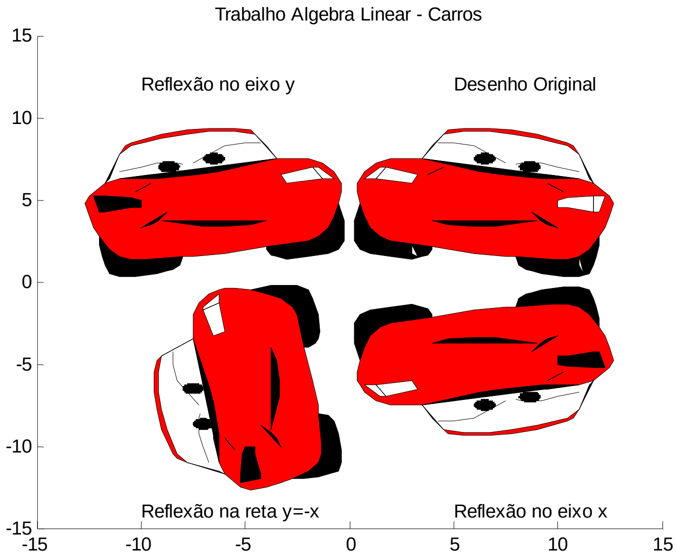

Figura 5 - Projeto: carros

```
% Projeto: carros
title('Trabalho Algebra Linear - Carros');
axis([-15 15 -15 15])
hold on
MRX= [1 0 ; 0 -1]; % reflexão no eixo x
MRY= [-1 0 ; 0 1]; % reflexão no eixo y
MRT= [0 -1 ; -1 0]; % reflexão na reta y=-x
% primeiro pneu
A=[8 8.15 8.5 8.75 9.25 10.25 11 11.5 11.75 11.85 12 12 11 11 10.5 9.75 8;1.5 1 0.75
0.65 0.5 0.35 0.35 0.5 1 1.5 2.2 2.75 2 1.5 1.35 1.35 1.5];
fill([A(1,:)],[A(2,:)],'k')
T1=MRX*A; T2=MRY*A; T3=MRT*A;
fill([T1(1,:)],[T1(2,:)],'k'), fill([T2(1,:)],[T2(2,:)],'k'), fill([T3(1,:)],[T3(2,:)],'k')
B=[11 11 11.25;1.5 1 0.5];
fill([B(1,:)],[B(2,:)],'w')                                                    (13)
T4=MRX*B; T5=MRY*B; T6=MRT*B;
fill([T4(1,:)],[T4(2,:)],'k'), fill([T5(1,:)],[T5(2,:)],'k'), fill([T6(1,:)],[T6(2,:)],'k')
% segundo pneu
C=[4 4 3.75 3.5 3 2 1 0.5 0.25 0.25 0.5 0.75 1 1.5 2 4;2.15 2 1.6 1.5 1.4 1.5 1.75 2 2.5
3.75 4.75 4 3.25 2.75 2.5 2.15];
fill([C(1,:)],[C(2,:)],'k')
T7=MRX*C; T8=MRY*C; T9=MRT*C;
fill([T7(1,:)],[T7(2,:)],'k'), fill([T8(1,:)],[T8(2,:)],'k'), fill([T9(1,:)],[T9(2,:)],'k')
D=[3 3 3.25;2.25 1.75 1.5];
fill([D(1,:)],[D(2,:)],'w')
T10=MRX*D; T11=MRY*D; T12=MRT*D;
fill([T10(1,:)],[T10(2,:)],'k'), fill([T11(1,:)],[T11(2,:)],'k'), fill([T12(1,:)],[T12(2,:)],'k')
% frente
E=[0.5 0.4 0.4 0.5 0.75 1.25 2 3.5 5 7.25 8.75 9.5 11 11.75 12.5 12.65 12.5 12.25 12
11.5 11 10.5 9.75 8 7.5 6 4 2 1.5 1 0.75 0.5;4.75 5.5 6 6.25 6.75 7.25 7.5 7.5 7.25 6.75
```

```
6.5 6.5 6.25 6 5.25 4.75 4 3.25 2.75 2 1.5 1.35 1.35 1.5 1.5 1.75 2.15 2.5 2.75 3.25 4
4.75];
fill([E(1,:)],[E(2,:)],'r')
T13=MRX*E; T14=MRY*E; T15=MRT*E;
fill([T13(1,:)],[T13(2,:)],'r'), fill([T14(1,:)],[T14(2,:)],'r'), fill([T15(1,:)],[T15(2,:)],'r')
% sorriso
F=[4 4.75 6 7 9;3.75 3.5 3.35 3.35 3.75];
fill([F(1,:)],[F(2,:)],'k')
T16=MRX*F; T17=MRY*F; T18=MRT*F;
fill([T16(1,:)],[T16(2,:)],'k'), fill([T17(1,:)],[T17(2,:)],'k'), fill([T18(1,:)],[T18(2,:)],'k')
G=[8.75 9.15 9.5 10;4.25 3.75 3.5 3.25];
fill([G(1,:)],[G(2,:)],'k')
T19=MRX*G; T20=MRY*G; T21=MRT*G;
fill([T19(1,:)],[T19(2,:)],'k'), fill([T20(1,:)],[T20(2,:)],'k'),fill([T21(1,:)],[T21(2,:)],'k')
% faróis
H=[3.25 1.75 1.25 0.75 1.5 1.75 1.25 3 3.25;6.5 7 6.25 6.25 7 7 6.25 6 6.5];
fill([H(1,:)],[H(2,:)],'w')
T22=MRX*H; T23=MRY*H; T24=MRT*H;
fill([T22(1,:)],[T22(2,:)],'w'), fill([T23(1,:)],[T23(2,:)],'w'),
fill([T24(1,:)],[T24(2,:)],'w')
I=[11.75 10.5 10 10 10.5 11.75 11.75 12 12.25 11.75 11.75;
4.25 4.5 4.5 5 5.15 5.25 4.25 4.25 5.25 5.25 4.25];
fill([I(1,:)],[I(2,:)],'w')
T25=MRX*I; T26=MRY*I; T27=MRT*I;
fill([T25(1,:)],[T25(2,:)],'w'), fill([T26(1,:)],[T26(2,:)],'w'),
fill([T27(1,:)],[T27(2,:)],'w')
% riscos acima do farol
J=[3.75 4.5;6.5 7];
fill([J(1,:)],[J(2,:)],'k')
T28=MRX*I; T29=MRY*I; T30=MRT*I;
fill([T28(1,:)],[T28(2,:)],'k'), fill([T29(1,:)],[T29(2,:)],'k'), fill([T30(1,:)],[T30(2,:)],'k')
L=[9.5 10.25;6 5.5];
fill([L(1,:)],[L(2,:)],'k')
T31=MRX*L; T32=MRY*L; T33=MRT*L;
fill([T31(1,:)],[T31(2,:)],'k'), fill([T32(1,:)],[T32(2,:)],'k'), fill([T33(1,:)],[T33(2,:)],'k')
% entrada de ar
M=[11 9.25 7.25 6.25 3.5;6.25 6.25 6.5 6.75 7.5];
fill([M(1,:)],[M(2,:)],'k')
T34=MRX*M; T35=MRY*M; T36=MRT*M;
fill([T34(1,:)],[T34(2,:)],'k')
fill([T35(1,:)],[T35(2,:)],'k')
fill([T36(1,:)],[T36(2,:)],'k')
% teto
N=[4.5 4.75 5.5 6.75 7.75 9 10.5 10.75 11 10.5 9 7.75 6.75 5.5 4.5;9 9.25 9.35 9.35
9.25 9 8.5 8.25 7.75 8.25 8.75 9 9.15 9.15 9];
fill([N(1,:)],[N(2,:)],'r')
T37=MRX*N; T38=MRY*N; T39=MRT*N;
fill([T37(1,:)],[T37(2,:)],'r'), fill([T38(1,:)],[T38(2,:)],'r'), fill([T39(1,:)],[T39(2,:)],'r')
```

```
O=[3.5 4 4.5;7.5 8.25 9];
fill([O(1,:)],[O(2,:)],'k')
T40=MRX*O; T41=MRY*O; T42=MRT*O;
fill([T40(1,:)],[T40(2,:)],'k'), fill([T41(1,:)],[T41(2,:)],'k'), fill([T42(1,:)],[T42(2,:)],'k')
P=[11 11.5 11.75;7.75 6.25 6];
fill([P(1,:)],[P(2,:)],'k')
T43=MRX*P; T44=MRY*P; T45=MRT*P;
fill([T43(1,:)],[T43(2,:)],'k'), fill([T44(1,:)],[T44(2,:)],'k'), fill([T45(1,:)],[T45(2,:)],'k')
% sobrancelhas
R=[4.25 5 6 6.75 7.5;8.5 8.5 8.25 7.75 7.25];
plot([R(1,:)],[R(2,:)],'k')
T49=MRX*R; T50=MRY*R; T51=MRT*R;
plot([T49(1,:)],[T49(2,:)],'k'), plot([T50(1,:)],[T50(2,:)],'k'),
plot([T51(1,:)],[T51(2,:)],'k')
S=[8 8.25 9.25 10 11;7.15 7.25 7.25 7 6.75];
plot([S(1,:)],[S(2,:)],'k')
T52=MRX*S; T53=MRY*S; T54=MRT*S;
plot([T52(1,:)],[T52(2,:)],'k'), plot([T53(1,:)],[T53(2,:)],'k'),
plot([T54(1,:)],[T54(2,:)],'k')
% textos
text(-10,-14, 'Reflexão na reta y=-x'), text(5,-14, 'Reflexão no eixo x')
text(-10,12, 'Reflexão no eixo y'), text(5,12, 'Desenho Original')
% olhos
t=0:0.01:2*pi;
T=[6.5;7.5];U=[8.65;7];
T55=MRX*T; T56=MRY*T; T57=MRT*T;
T58=MRX*U; T59=MRY*U; T60=MRT*U;
x1=T(1)+cos(t)/2;y1=T(2)+sin(t)/3;patch(x1,y1,'k')
x1= U(1)+cos(t)/2;y1=U(2)+sin(t)/3;patch(x1,y1,'k')
x1=T55(1)+cos(t)/2;y1=T55(2)+sin(t)/3;patch(x1,y1,'k')
x1=T56(1)+cos(t)/2;y1=T56(2)+sin(t)/3;patch(x1,y1,'k')
x1=T57(1)+cos(t)/2;y1=T57(2)+sin(t)/3;patch(x1,y1,'k')
x1=T58(1)+cos(t)/2;y1=T58(2)+sin(t)/3;patch(x1,y1,'k')
x1=T59(1)+cos(t)/2;y1=T59(2)+sin(t)/3;patch(x1,y1,'k')
x1=T60(1)+cos(t)/2;y1=T60(2)+sin(t)/3;patch(x1,y1,'k')
```

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A implementação do projeto detalhado neste artigo exige, dos acadêmicos, muito empenho e algumas horas de trabalho. Num primeiro momento, percebe-se certa inquietação dos alunos com relação à execução da tarefa, principalmente pelo fato de a maioria não conhecer o MATLAB. Após as explicações e a oportunidade de manipular o software, oferecida durante as aulas do semestre, a preocupação inicial dá lugar à criatividade e ao interesse.

Ao final de cada semestre, os trabalhos são expostos no bloco em que ocorre a disciplina. O interesse de alunos de outros semestres e cursos é evidente e o orgulho dos acadêmicos pelos seus próprios projetos também. Como já há uma tradição na elaboração desse projeto na disciplina de Álgebra Linear, desde o início de cada semestre surgem questionamentos, por parte dos alunos, a respeito da atividade.

Os principais objetivos do trabalho proposto são plenamente atingidos, ou seja, os acadêmicos manipulam e visualizam as transformações lineares planas e aprendem a utilizar o MATLAB. O conhecimento em relação ao software, aliás, auxilia em, pelo menos, outras quatro disciplinas dos cursos de Engenharia que fazem uso dessa ferramenta.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIAR, Eliane V. B. **As novas tecnologias e o ensino de matemática**. Disponível em: <http://www.essentiaeditora.iff.edu.br/index.php/vertices/article/viewFile/34/26 > Acesso em: 28 mai. 2011.

CHAPMAN, Stephen J. **Programação em MATLAB para engenheiros**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

GILAT, Amos. **MATLAB com aplicações**. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2006.

LAY, David. **Álgebra linear e suas aplicações**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

LIMA, Elon Lages. Conceituação, Manipulação e Aplicações: os três componentes do ensino da Matemática. In: **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo, n.41, 1999, p.1-6.

EXPLORING THE LINEAR TRANSFORMATIONS ON THE PLANE USING THE MATLAB

Abstract: *The purpose of this article is describe a working methodology used in the Linear Algebra discipline, in engineering courses, related to the teaching of linear transformations on the plan with the use of MATLAB. Academics have the task of drawing up a simple routine to create a figure on the plan and apply in it one or more linear transformations. The objective is implement the teaching of that content and offer students an opportunity to know the software and know how to use it.*

Key-words: *Linear transformations, Methodology, Teaching-learning, MATLAB software*